高３　スタンダードレベル数学ⅠAⅡBを受講する皆さんへ

ようこそ,『スタディサプリ』へ！　この講座を使って受験勉強を本格的にスタートする人も多いと思います。この講座は,そんなみなさんの期待に応えることができると自負しています。早速始めましょう，と言いたいところですが，何事も準備運動が大事です。いきなり走り始めるのではなく，以下の文にちょっと目を通してください。

大学入試における数学が，知識や公式の運用という意味で高校の教科書の範囲を大きく外れるようなことはありません。しかし，知識や公式に何かしらの漏れ，誤解，理解の不十分があると，それを運用する「場面」が来てもそれに気づかないということがあります。穴だらけの状態で背伸びをして何かをつかもうと思っても体勢を崩しかねませんよね。

前期テキストでは，まずみなさんのこれまでの学習を単元別にもう一度整理し直します。入試に対応できる力を養うのが目的ですから，扱う問題は入試問題が中心です。よって，知識や公式は教科書レベルですが，教科書に載っているような典型的な問題は省いてあります。「スタディサプリ」には「高１・高２向け」の講座も用意してありますので，講義の問題が全く理解できない場合は，一度そちらの講座を学習することをお勧めします。戻りながら，穴を埋めながら，土台を強固なものにしていく。後期テキストではその土台を元に，さらに上のレベルの問題にチャレンジしていきます。

入試レベルの数学の問題について，その解答を読み，内容を理解するのは至難の業です。なぜなら，式変形の意味や理由のすべてが記されているわけではないからです。人によってどの部分で行き詰まるかが全く違うのが数学の大きな特徴です。よって，講義問題については「動画授業」でその理解を全面的にバックアップします。「百聞は一見にしかず」。教わることで，新たな発見，自分の理解をより強固なものにする，視覚と聴覚の両方に訴えかける，といった様々な効果が期待できます。

もちろん，この講座だけをやればよいのではありませんよ。さらなる力をつけるために学校等で配布された問題集などでより理解を深めていくことも大切です。

「人から人へ」。それは時代がどんなに進歩しても変わることがありません。直接会うことはなかなかできませんが，みなさんが真剣に動画を視聴すれば，まるで目の前に先生がいるような錯覚すら覚えることでしょう。なぜなら，先生はいつでも君たち一人ひとりが真剣に授業を受けている姿をカメラの向こうに見ながら授業しているのですから。

さぁ，そろそろ時間です。まずはしっかりと「予習」し，自分の力を確認しておいてください。いつでも，どこでも，何度でも。『スタディサプリ』は君たちと共にあります。

山内　恵介

＜前期　目次＞

※「高１・高２の講義（スタンダード)」は，スタディサプリ「**高１・高２　スタンダードレベル数学ⅠAⅡB**」の対応する講を表しています。基礎的な内容から復習を行いたいときに参照してください。

＜講座の受講の仕方＞

①　予習について

すべての講は「講義問題」3 問で構成されています。まずは何も見ないで問題をノートまたはルーズリーフに解いてみましょう。問題をとらえる力がどこまで養われているかわかります。

ここでは必ずしも答案形式にこだわる必要はありません。最後まで解けないことも多いかもしれません。それでも，いろんな可能性を追ってみましょう。

ちなみに 1 問にかけてよい時間はおよそ 15 分～20 分（[1][2]に分かれている場合はそれぞれおよそ 10 分）です。3 問でおよそ 1 時間。数学に本気で向き合う時間です。

②　講義について

予習をすることで自分の見るべきポイントが押さえられた状態，これが講義を受ける前に必要な準備です。それができている状態で授業を見て，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。

問題が掲載されているページは全て見開きの構成となっており，問題の下には「Point Pickup」と題して，この問題で習得すべき項目が穴埋め形式で載っています。また，見開きの右側には余白（「Note」欄）がふんだんに用意されています。ここには何でも「自由」に書いて残すことができます。「自由」とはどういうことか。それは，このスペースに画面上の黒板に書かれたことを「書き写すのみ」に留まることは厳禁，ということです。授業時間は限られていますから，先生は全てを黒板に書くことはしていません。よって，授業を聞き，先生が話したことや自分なりに感じ取ったことを記しておくべきなのです。きれいにまとめても誰も見てくれませんよ。あくまで「Note」＝「記録」です。後から見て自分だけがわかる程度でよいのです。

これまでの人生で，書く速度を速くする努力をしてこなかった人へ。この講座はいつでも止めたり戻ったりできます。置いていかれそうになったら，動画を止めてゆっくり書くのもよいでしょう。けれども，「聞きながら書く」という訓練はこれからでも遅くありませんよ。この講義を通じて「聞きながら書く」ということを実践してみてください。

ただし動画を止められるからといって「考えすぎ」は逆に厳禁です。あなた方に残された時間は限られています。勉強は数学だけじゃないでしょう？　「だいたいこういうことかな」という感じで大枠をとらえた上で，細かいところは後からこだわる姿勢も時には大事ですよ。

③　復習について　その１

まずは問題によって語られた「ストーリー」を，テキストの問題や Point Pickup を見ながらもう一度頭に描いてみましょう。もし思い出せない場面があったら「Note」欄を見てみましょう。そしてそこで描いた世界観を元に，次に自分で実際に問題を別の紙や復習用ノートに解いてみましょう。予習と異なり，ここでは計算も含め実際に丁寧に記述していきましょう。もし全然歯がたたない場合は，もう一度講座を視聴することをお勧めします。

もちろん数学という科目の特性上，あなたの技術力の不足などにより途中で止まってしまうかもしれません。また，あなたの想いをどう記述で表現してよいかわからない場合もあるかもしれません。安心してください。すべての問題に「解答例」がついています。必要に応じて参考にしてください。

講義問題の復習をこのように欠かすことなく行い，解答を自分で書き上げることができた時が，先生から得たものが自分のものになった瞬間です。こうして書き上げた答案を，テキストと一緒に保存しておきましょう。

また１回の復習で納得のいくものが書けないケースもあるかと思います。そういった場合は，時間をおいてもう一度問題を解き直すことをお勧めします。チャンスは「空き時間」「隙間時間」です。一度自分で取り組んだことは，次は確実に速度と正確性が上がります。それを実感することも成長の糧となりましょう。

④　復習について　その２

③が終わったら，新たな問題にチャレンジしたくなるでしょう。「練習問題」が各講に用意してあります。講義の問題に関連する問題もあれば，発展的な内容もあります。また問題によって難易度も様々です。

解き終えたら，「解答」を見て自分の到達具合をチェックしてみましょう。この「練習問題」もまた，みなさんの成長のために厳選した問題です。より理解を深めていただきたく思います。

以上を確実に繰り返すことにより，確実に「自分で考える」領域に近づくことができます。入試を想定すると，最終的には自分で答案を作り上げる必要があります。授業を受けるだけでは，「受けっぱなし」に終わることもあるでしょう。また，記憶とともに忘れ去られてしまうことも。それを防ぐためのこのサイクルが大切です。もちろん，授業は何度でも再生可能です。後から改めて見るとその意味がわかった，という声もよく耳にします。決して短くはないこの道のり。一日一日，一歩一歩，焦らず，確実に進んで行きましょう。

最後に。この講義と同時並行で進める日々の自主学習においては，その理解を深めるための「解説」が重要です。例えば「授業」や「解答集」がそれに当たります。とくに「詳細な解答」，つまり答えにたどり着く「プロセス」を，自分の解答と照らし合わせる作業が欠かせません。

ですから「最後の答」しかない問題集やプリントではお話になりません。「自分で考えれば必ず答えにたどり着く！」とおっしゃる先生もいますが，「知識の欠如」「時間の制約」「経験不足」「他教科とのバランス」が考慮されておらず，「自分ができる（できてきた）ことは他人もできるはず」という無責任な発言とも言えましょう。受験勉強に求められるのは，「時間対効果」です。

よい道筋を参考に，自分で切り開く時の「道標」としながら自主学習を進めて行きましょう。それが，自力で進むことができる力を養うための，効率のよい学習法なのです。

第1講　数と式

$\boxed{1}$ [1]　$2x^2y+5xy^2-6x^2+2y^3-6y^2-15xy$ を因数分解せよ.

[2]　$\dfrac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，

$a^2b+a^2+2ab^2+2ab+b^3+b^2$ の値を求めよ.

【Point Pickup】

[1]　因数分解の基本

「次数の低い文字」に着目し，「　　　　　　　」にする.

着目しなかった文字は「　　」扱い.

[2]　$\sqrt{\quad}$ の整数部分と小数部分

$\sqrt{\quad}$ の小数部分が無限に続くとき, (　　　部分) = (　　　　　) − (　　　部分) を利用.

値を求める式（求値式）が複雑な場合は「　　　　　」が効くことが多い.

< Note >

$\boxed{2}$ ［1］ (1) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}$ を簡単にせよ．

(2) $\dfrac{1}{p-\sqrt{6}}=1-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ を満たす p の値を求めよ．

［2］ $\sqrt{5+\sqrt{21}}-\sqrt{5-\sqrt{21}}$ を簡単にせよ．

【Point Pickup】

[1]　分母の有理化

$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ の利用．

等式（方程式）の場合は「　　　　　　」「　　　　　　　　　　」を視野に．

[2]　二重根号の簡約（二重根号をはずす）

$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$　（ただし $a>b$）

また，二重根号には「　　　」が効く．

< Note >

$\boxed{3}$ [1]　実数 x, y が $x+y=5$, $x^3+y^3=50$ を満たすとき，xy, x^2+y^2, x^5+y^5 の値を求めよ．

[2]　$a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=3$, $a^3+b^3+c^3=2$ のとき，$ab+bc+ca$, abc の値を求めよ．

【Point Pickup】

[1]　対称式

２つの文字 x, y の式について，x と y を入れ替えても同じになる式を x, y の「　　　　」という．x, y の「　　　　　」は「　　　」と「　　」で表せる．

[2]　３文字の対称式変形

a, b, c の基本対称式は「　　　　　」「　　　　　　　」「　　　　」

$\boxed{\text{公式}}$　$(a+b+c)^2=$

$\boxed{\text{準公式}}$　$a^3+b^3+c^3-3abc=$

< Note >

第１講　数と式

(1)　$x=\sqrt{5+\sqrt{21}}$，$y=\sqrt{5-\sqrt{21}}$ のとき，$x^2+y^2=\boxed{\text{アイ}}$，$xy=\boxed{\text{ウ}}$，
$x+y=\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}$ である．

(2)　$2+\sqrt{6}=\sqrt{\boxed{\text{カ}}}\left(\sqrt{\boxed{\text{カ}}}+\sqrt{3}\right)$ より $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{6}}$ を簡単にすると
$\sqrt{\boxed{\text{キ}}}-\sqrt{\boxed{\text{ク}}}-2+\sqrt{6}$ である．

(3)　$x+y+z=1-2\sqrt{7}$，$xy+yz+zx=9-2\sqrt{7}$ のとき，$x^2+y^2+z^2=\boxed{\text{ケコ}}$ である．

< Note >

第2講　1次不等式・2次方程式

$\boxed{1}$　(1)　不等式 $2ax \leqq 6x+1$ を解け．ただし，a は定数とする．

(2)　$x \geqq -6$ であるすべての x に対し，不等式 $2ax \leqq 6x+1$ が成り立つような定数 a の範囲を求めよ．

【Point Pickup】

不等式について

・負の数をかけたり割ったりすると，不等号の向きが逆になる．

・割る数に「　　　」が含まれる場合は，その割る数が「　　」か「　　」か「　　」かで「　　　　　」をする．

とくに「　　」のときは x が消えてしまうことがある．x が消えたあと，

不等式が成立　→ 解は「　　　　　　　」

不等式が不成立 → 解は「　　　　　　　」

不等式が「成立する」「成り立つ」とは？

調べたいすべての値や範囲を代入した式が「　　　　　ことを言っている」ということ．2つの不等式の包含関係を確かめるためには「　　　　」が有効．

< Note >

$\boxed{2}$ [1]　$k>1$ とする．2 次方程式 $kx^2+(1-2k)x-2=0$ の 2 つの解を α，β とする．2 次方程式 $x^2-2(k+1)x+4k=0$ の解の 1 つは β であり，もう 1 つの解を γ とする．

(1)　β を求めよ．

(2)　$\beta-\alpha=\gamma-\beta$ が成り立つとき，k の値を求めよ．

[2]　実数 x の方程式 $x^2-(k-1)x-k^2=0$ と $x^2-2kx+k=0$　がただ 1 つの共通解を持つとき，k の値を求めよ．また，それぞれの k に対応する共通解を求めよ．

【Point Pickup】

[1]　2 次方程式の解

まずは「　　　　　」を試みる．だめなら「　　　　　」．

[2]　2 次方程式の「共通解」

解が出るとき

→ それぞれの方程式から出た解を比べる，または片方の解をもう一方に代入する．

解が出ないとき

→ 共通解を「　　　　　　」．その後，代入した 2 式を「　　　」して解く．

＜ Note ＞

$\boxed{3}$ [1]　x についての2次方程式 $x^2-px+\dfrac{p^2-1}{4}=0$ の2つの解を x_1，x_2 とするとき，$|x_1-x_2|$ の値を求めよ．

[2]　x についての2次方程式 $x^2+px+q=0$ が，異なる2つの解 α, β をもつとする．2次方程式 $x^2+qx+p=0$ が $\alpha(\beta-2)$，$\beta(\alpha-2)$ を2解にもつとき，p，q の値を求めよ．

【Point Pickup】

[1]　2次方程式の「解と係数の関係」

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2解を α，β とすると　$\alpha+\beta=$　　　，　　$\alpha\beta=$

2次方程式の解の「　　」「　　」(「　　」) が絡む問題に有効.

[2]　解と係数の関係の「逆」

$\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=q$ のとき，α，β を2解にもつ2次方程式の1つは

「　　　　　　　　　　」である.

< Note >

第2講　1次不等式・2次方程式

(1)　x についての不等式 $ax+3>2x$ の解は

$a>\boxed{ア}$ のとき　$x>\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}-a}$　　$a<\boxed{ア}$ のとき　$x<\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}-a}$

$a=\boxed{ア}$ のとき　$\boxed{エ}$ である．

$\boxed{エ}$ については　①：すべての実数　②：解なし　から選べ．

(2)　異なる2つの2次方程式 $x^2+ax+b=0$　……①　$x^2+bx+a=0$　……②　がただ1つの共通の解をもつとき，その共通解は $\boxed{オ}$ である．またこのとき，共通でない解の和は $\boxed{カキ}$ である．

＜ Note ＞

第3講　2次関数(1)

1 [1]　放物線　$C : y=2x^2-3x+5$ について，次の問いに答えよ．

(1)　C の頂点の座標を求めよ．

(2)　C を x 軸方向に1，y 軸方向に -2 平行移動し，さらに原点に関して対称に移動した放物線の方程式を求めよ．

[2]　放物線 C と x 軸に関して対称な放物線は点 $(1,\ 1)$ を通り，y 軸に関して対称な放物線は点 $(1,\ -1)$ を通り，原点に関して対称な放物線は点 $(2,\ 0)$ を通る．放物線 C の式を求めよ．

【Point Pickup】

[1]　$y=ax^2+bx+c$ の移動

2次関数のグラフの平行移動・対称移動は，「　　　」を移動させる．「　　　」に注意．

一般に，関数 $y=f(x)$ について

$\boxed{\text{平行移動}}$　x 軸方向に p，y 軸方向に q ⇒

$\boxed{\text{対称移動}}$　x 軸 ⇒　　　　y 軸 ⇒　　　　原点 ⇒

[2]　逆方向への移動

「$f(x)$ を移動したら $g(x)$ になる」は，「　　　」を逆方向に移動することを視野に．

「$f(x)$ を移動したら点Aを通る」は，「　　　」を逆方向に移動することを視野に．

＜ Note ＞

$\boxed{2}$ [1]　2 次関数のグラフが $(-1,\ 6)$，$(5,\ 6)$ を通るとき，このグラフの軸の方程式を求めよ．さらにこのグラフが点 $(1,\ -2)$ を通るとき，この 2 次関数の最小値を求めよ．

[2]　a を定数とする．x の 2 次関数 $y=3x^2+ax+\dfrac{2}{3}a$ について，次の問いに答えよ．

(1)　y の最小値 m を a を用いて表せ．　　(2)　m を最大とする a の値を求めよ．

【Point Pickup】

[1]　2 次関数のグラフの対称性

2 次関数のグラフは「　　　」に関して対称.

y 座標が同じ ＝「　　　からの距離」が同じ

2 次関数の最大，最小（基本）

変域に「　　」が含まれれば，「　　　」の y 座標が最大，最小の候補

[2]　最大値，最小値が「動く」

最大値，最小値に「　　　」が含まれるとき，その「　　　」の「　　　　」とみると最大値，最小値が動き出す.

< Note >

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=x^2-6x+10$ について，次の設問に答えよ．

(1) $f(x)$ の $0\leqq x\leqq 5$ における最大値および最小値を求めよ．

(2) a を正の定数とする．このとき，$f(x)$ の $0\leqq x\leqq a$ における最大値を求めよ．

(3) b を定数とする．このとき，$f(x)$ の $b\leqq x\leqq b+3$ における最大値を b の式で表せ．

【Point Pickup】

2 次関数の最大値・最小値

下に凸の 2 次関数において

$\boxed{\text{最小値}}$ 「　　」に注目.

変域に「　　」を 含む　→ 頂点が最小

含まない → 軸に近い方が最小

$\boxed{\text{最大値}}$ 「　　　」を利用.

「　　　　」が 軸より右 → 右端で最大

軸より左 → 左端で最大

＜ Note ＞

第3講　2次関数(1)

(1)　放物線 $y=3x^2$ を x 軸方向に a，y 軸方向に b 平行移動したグラフが2点 $(-6,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通るとき，$a=-\boxed{\text{ア}}$，$b=-\boxed{\text{イウ}}$ である．

(2)　$y=-3x^2+2ax+a$ の最大値を m とするとき，m の最小値は $-\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である．

(3)　$f(x)=x^2+ax-2a+6$ の $x\geqq 0$ における最小値は

$a\leqq\boxed{\text{カ}}$ のとき　$-\dfrac{a^2}{\boxed{\text{キ}}}-\boxed{\text{ク}}a+6$

$a\geqq\boxed{\text{カ}}$ のとき　$-\boxed{\text{ケ}}a+6$

である．よって，$f(x)$ の $x\geqq 0$ における最小値が1になるような a の値は $\boxed{\text{コ}}$ 個ある．

< Note >

第4講　2次関数(2)

$\boxed{1}$ [1]　2次不等式 $x^2+x-2 \leqq 0$ の解を求めよ．また，2次不等式 $x^2+x-2 \leqq |x|$ の解を求めよ．

[2]　a を実数とする．2次不等式 $x^2-ax+(a-1) \leqq 0$　……①　について次の問いに答えよ．

(1)　不等式①を解け．

(2)　不等式①を満たす整数 x の個数がちょうど3個であるような a の値の範囲を求めよ．

【Point Pickup】

[1]　2次不等式を解く

・まずは2次関数と x 軸との共有点（交点）を求める．

2次方程式と同じく，まずは2次式を「　　　　　　」，だめなら解の公式．

・$f(x)>0$　は　$f(x)$ が「x 軸」より「　　」にある部分

$f(x)<0$　は　$f(x)$ が「x 軸」より「　　」にある部分

$f(x)>g(x)$ は　$f(x)-g(x)>0$　　または　$f(x)$ が $g(x)$ より上にある部分

[2]　文字定数を含む2次不等式

共有点の x 座標に「　　　」が入る場合は，その「　　　　　　」に注意．

また，必要に応じて範囲を拡大・縮小して考える．

＜ Note ＞

$\boxed{2}$ [1]　2 次不等式 $x^2+2(a+2)x+2a^2+a-6>0$ が任意の実数 x に対して成り立つような定数 a の範囲を求めよ.

[2]　不等式 $kx^2+(2k-3)x+2k-1 \geqq 0$ がすべての実数 x に対して成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ.

【Point Pickup】

[1]　絶対不等式（基本）

「絶対不等式」とは？ ⇒ ある範囲における「　　　　x」（任意の x）で成立する不等式

ある不等式を絶対不等式にするには,「　　　・　　　」を用いるとよい.

ある範囲で $f(x) \geqq 0$ が成立 ⇒ その範囲における $f(x)$ の「　　　　」が 0 以上

ある範囲で $f(x) \leqq 0$ が成立 ⇒ その範囲における $f(x)$ の「　　　　」が 0 以下

ただし，2 次不等式の場合は「$D<0$」も時には有効.

[2]　最高次数の係数が文字

その文字の「　　　」により，グラフの凸方向が決定.

また「　」になると次数が下がるので注意.

< Note >

$\boxed{3}$　2次方程式 $x^2+2ax+4a+12=0$　……①　について，次の問いに答えよ．ただし，a は定数とする．

(1)　方程式①が重解をもつとき，a の値とその重解を求めよ．

(2)　方程式①が異なる2つの負の解をもつとき，a の値の範囲を求めよ．

(3)　方程式①が負の解をもつとき，a の値の範囲を求めよ．

【Point Pickup】

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の「解の存在範囲（解の配置）」

$ax^2+bx+c=f(x)$ とおき，グラフと x 軸の「　　　　」が範囲内に収まるようにする．

重要　(i)「　　　」の y 座標の±

(ii)「　　」が範囲内

(iii)「　　　　　$>0(\geqq 0)$」　または　「頂点の y 座標 $<0(\leqq 0)$」

※範囲が「開区間」の場合，その「端点を通る場合」を忘れやすいので注意！

< Note >

第4講　2次関数(2)

(1)　a を正の整数とする．x の2次不等式 $x^2-6x-a^2-2a+8\leqq 0$ を満たす整数が33個あるとき，$a=\boxed{\text{アイ}}$ である．

(2)　すべての実数 x に対して $ax^2+(a+1)x+a<0$ が成り立つような定数 a の値の範囲は $a<-\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．

(3)　2次方程式 $x^2-2kx+k+2=0$　……① が1より大きい異なる2つの実数解をもつような定数 k の値の範囲は $\boxed{\text{オ}}<k<\boxed{\text{カ}}$ である．また①が $x=1$ を解にもつとき，もう1解は $x=\boxed{\text{キ}}$ である．

< Note >

第5講　場合の数(1)

$\boxed{1}$　5個の数字0，1，2，3，4から異なる3個を並べて3桁の整数をつくる．

(1)　3桁の整数は全部で何個できるか．

(2)　偶数は何個できるか．また，9の倍数は何個できるか．

(3)　偶数でなく9の倍数でもないものは何個できるか．

【Point Pickup】

順列の基本

全て異なる n 個のものがあるとき

・それらを全て並べる場合の数 ⇒

・その中から「　　　　　」に r 個選んで並べる場合の数 ⇒

場所が決まっている，自動的に決まるものは計算に入れない．

・常に「　　　　」を狙う．

数字の順列で○桁の数を作る

・最高位に「　　」はこない．

・2の倍数 → 下1桁が「　　　」　　5の倍数 → 下1桁が「　　か　　」

4の倍数 → 下2桁が「　　　　　」(00含む)

・3の倍数 → 各位の数の「　　」が3の倍数

9の倍数 → 各位の数の「　　」が9の倍数

条件が複数あるときの場合の数

「　　　　　」の利用により，何を求めるべきか整理するとよい．

< Note >

$\boxed{2}$ [1]　A，A，B，B，B，C，C，C，C の 9 個の文字全部を使って作ることができる順列の総数を求めよ．またそのうち，2 個の A が連続している順列，3 個の B がどれも連続しない順列はそれぞれ何通りあるか求めよ．

[2]　赤玉 1 個，青玉 4 個，白玉 4 個がある．同じ色の玉は区別しないものとする．これら 9 個の球を左から右へ 1 列に並べるとき，左右対称になる並べ方の総数を求めよ．また，円形に並べる並べ方の総数を求めよ．

【Point Pickup】

[1]　同じものを含む順列

n 個のもののうち，同じものを p 個，q 個，r 個，…… ずつ含むときの順列は

連続する，連続しない

連続する　⇒「　　　　　　」として扱い，その中の順列を考える．

連続しない ⇒ 他のものを先に並べ，後から「　　　　または　　　　」に入れる．

入れる「　　　」を選んで，そこに並べる（順列）

[2]　左右対称

①個数が偶数 ⇒ 均等に 2 つに分け，左右のうちどちらか一方の順列のみを考える．

もう一方の順列は自動的に決まる．

②個数が奇数 ⇒「　　　　」あるものに注目し，そのうちの 1 つを「　　　　」におく．

残ったものの並べ方は①と同じ．

円順列

何かを「　　　」し，残りの順列を考える（または同じ並び方の総数で割る）

< Note >

$\boxed{3}$ ［1］ A，B，C，D，E，F の 6 文字を全部使ってできる文字列を，アルファベット順の辞書式に並べるとき，DECFBA は何番目か.

［2］ 次を満たす 5 桁の自然数の総数を求めよ.

⑴ 各桁が 1 か 2 で，1 と 2 の両方が用いられている自然数

⑵ 各位が 1，2，3 で，それらすべてが用いられている自然数

【Point Pickup】

［1］ 辞書式の順列

あるものを「　　　」し，他のものの順列の総数を考える.

すべて列挙すると「　　　　」となる.

［2］ 重複順列

異なる n 個（n 種類）のものから，同じものを複数回取ることを許して r 個取る順列は

< Note >

第5講　場合の数(1)

(1)　0, 2, 4, 6, 8 から異なる4個を並べて4桁の整数を作るとき，4桁の整数は全部で $\boxed{\text{アイ}}$ 個あり，このうち，5の倍数は $\boxed{\text{ウエ}}$ 個，3の倍数は $\boxed{\text{オカ}}$ 個ある．

(2)　男子4人と女子3人を円形に並べるとき，女子どうしが隣り合わないような並べ方は $\boxed{\text{キクケ}}$ 通りある．

(3)　7個の数字 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3 をすべて用いて7桁の整数を作るとき，数字の並びが左右対称なものは $\boxed{\text{コ}}$ 通りある．また，できた7桁の整数を小さい順に並べるとき，3211231 は $\boxed{\text{サシス}}$ 番目に現れる．

＜ Note ＞

第6講　場合の数(2)

$\boxed{1}$ [1]　ケーキ5個とアイスクリーム3個がある．ケーキもアイスクリームもすべて種類が異なるとき，次の問いに答えよ．

(1)　ケーキ2個とアイスクリーム1個を選ぶ方法は何通りあるか．

(2)　特定の2個を含むように4個を選ぶ方法は何通りあるか．

(3)　アイスクリームを少なくとも1個含むように3個選ぶ方法は何通りあるか．

[2]　8人乗りの乗り物が2台ある．10人の人をこれら2台の乗り物に分乗させたい．

(1)　人も乗り物も区別しないで分乗させる方法は何通りあるか．

(2)　人は区別しないが，乗り物は区別して分乗させる方法は何通りあるか．

(3)　人も乗り物も区別して分乗させる方法は何通りあるか．

【Point Pickup】

[1]　タイムラグの罠 ～ 同じ組に時間を分けて入れる

区別できるものを分けるときは，「　　　　　　」という言葉に注意．

条件を満たすように先に取り出し，そこに後から追加すればよい，と考えるとハマる．

→「　　　を先に決める」または「　　　　　の利用」

[2]　個数制限がある組み分け

「　　　を先に決める」→ 組に振り分け（→ 物を分ける）

「　　　　　の利用」も考慮する．

< Note >

2　6枚の異なるカードがある.

(1)　2枚ずつA，B，Cの3人に配る方法は何通りあるか.

(2)　2枚ずつ3つの組に分ける方法は何通りあるか.

(3)　どの人も少なくとも1枚は受け取るようにA，B，Cの3人に配る方法は何通りあるか.

【Point Pickup】

モノと人のマッチング

人にモノを配る ＝ 人がモノに選ばれる　ということ.

(例)　Aさんに異なる2枚のカードを配る ＝ 異なる2枚のカードがAを2回選ぶ

A，B，Cさんにカードを配る ＝ カードがA，B，Cさんを選ぶ

組に区別がないときの組み分け

区別できるものを分けるとき，組に「　　　　がない」かつ「分ける　　　　が同じ」ときは，その組数の「　　　　　　　」

個数制限のない組み分け

分けるものが区別できるときは「　　　　　　」で分ける.

区別できないときは「重複組合せ」で個数を決める.

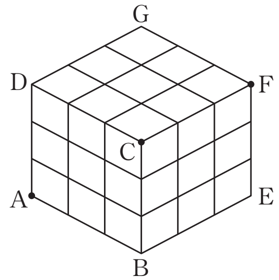
< Note >

$\boxed{3}$　図のように立方体の隣接する３つの面 ABCD，BEFC，CFGD 上にそれぞれ縦横等間隔の線を描き，その線の上を通ることができるとする．次のそれぞれの場合に最短距離で通る道順は何通りあるかを求めよ．

(1)　面 ABCD 上で A から C へ行く場合

(2)　面 ABCD，BEFC 上で A から F へ行く場合

(3)　面 ABCD，BEFC，CFGD 上で A から F へ行く場合



【Point Pickup】

最短経路

「　　　　　　　　　　　　　　　　」または「　　　　　　」

事象を「分ける」

ある条件を満たす場合の数を求めるとき，その条件を満たすものを「　　　　　　」考える．
小問がその役目を果たしている場合も多い．
「　　　　　　」ものがある場合に注意．

< Note >

第6講　場合の数(2)

(1)　Aグループは3人，Bグループは3人，Cグループは4人からなり，どの人も複数のグループには属していないとする．これら合計10人から7人を選ぶとき，各グループから少なくとも1人が選ばれる選び方は $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りである．

(2)　6人の生徒 a，b，c，d，e，f を3つの部屋P，Q，Rに入れる．各部屋は6人まで入れることができる．このとき，空室があってもよいとして，3つの部屋への生徒の入れ方は全部で $\boxed{\text{エオカ}}$ 通り，各部屋に2人ずつ入るような生徒の入れ方は全部で $\boxed{\text{キク}}$ 通り，空室ができないような生徒の入れ方は $\boxed{\text{ケコサ}}$ 通りである．

< Note >

第７講　確率(1)

$\boxed{1}$ ［1］ 5 枚のカード A，B，C，D，E を横 1 列に並べるとき，次の確率を求めよ．

(1) 中央のカードが C ではない確率

(2) A と B，または B と C が隣り合う確率

［2］ 0，1，2，3，4，5 の 6 個の数字から，3 個の数字を 1 つずつ取り出し，取り出した順に並べて数をつくる．このとき，3 桁の数になる確率を求めよ．また，3 桁の偶数になる確率を求めよ．

【Point Pickup】

［1］ 確率の基本

$$\text{確率} = \frac{\text{場合の数}}{\text{場合の数}}$$

確率の答えは分数 ⇒「　　　」を狙う．

［2］ 1 つずつ並べる ⇒「　　　　　」取り出し，その「　　　」を考える．

確率の余事象の注意点 ⇒ 必ずしも 1 から引くわけではない．

< Note >

$\boxed{2}$　1から6までの異なる数字を1つずつ書いた6枚のカードがある．このカードをA，B，Cの3人に2枚ずつ配る．

(1)　1，2の数字を書いたカードが2枚ともAに配られる確率を求めよ．

(2)　1，2の数字を書いたカードが2枚とも3人のいずれかに配られる確率を求めよ．

(3)　A，B，Cに2枚ずつ配られたカードの和がそれぞれ等しい確率を求めよ．

(4)　A，B，Cに2枚ずつ配られたカードの和がそれぞれ6以上となる確率を求めよ．

【Point Pickup】

組合せ　＝　${}_n\mathrm{C}_r$　では必ずしもない

条件を満たす組合せは，時に「　　　　　」で求める必要がある．

逆に，「　　　　　　　」に決めることができる場合は ${}_n\mathrm{C}_r$ を有効利用しよう．

< Note >

$\boxed{3}$ ［1］　4 つの袋があり，各袋に赤，青，黄の玉が 1 つずつ入っている．各袋から 1 つずつ玉を取り出すとき，取り出した 4 つの玉がすべて同じ色である確率を求めよ．
また，取り出した玉の色が 2 種類である確率を求めよ．

［2］　A，B の 2 人を含む 9 人を 3 人ずつ 3 つのグループに無作為に分ける．

(1)　A，B が異なるグループとなるのは何通りあるか求めよ．

(2)　A，B が同じグループとなる確率を求めよ．

【Point Pickup】

［1］　結果から原因へ

与えられた結果を実現するためには，どこで何が起こる必要があるのかを考える．
その計算をすれば，試行の結果が条件を満たすものとして決定するのか，常に自問自答．

［2］「排反」「余事象」の意識

ある特定の事象に注目したとき，それが起こるか起こらないかの 2 択となる．
小問が続くとき，今まで出た結果が活かせないか検証するとよい．

< Note >

第7講　確率(1)

1から9までの数字が1つずつ書かれた9枚のカードがある．これらを3枚ずつ3つのグループに無作為に分け，それぞれのグループから最も大きい数が書かれたカードを取り出す．

(1)　取り出された3枚のカードに8が含まれる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．

(2)　取り出された3枚のカードに3が含まれる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ である．

(3)　取り出された3枚のカードの数で，最小の数が6である確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}$ である．

< Note >

第8講　確率(2)

1　1つのさいころを3回投げるとき，1回目に出た数を X，2回目に出た数を Y，3回目に出た数を Z とする．このとき，次の確率を求めよ．

(1)　$X=Y$ である確率　　(2)　$X<Y$ である確率

(3)　$X=Y=Z$ である確率　　(4)　$X<Y<Z$ である確率

【Point Pickup】

反復試行について(1)

同じ試行を繰り返すとき，ある事象が起こる「　　」が問題になっていない場合

→「　　　を通じて」何がどういう順で起こるかを考え，それを確率の分子とする．

< Note >

$\boxed{2}$ ［1］　さいころを3回投げるとき，次の問いに答えよ．

(1)　すべて異なる目が出る確率を求めよ．

(2)　1の目がちょうど2回出る確率を求めよ．

［2］　原点を出発点として数直線上を動く点Pがある．さいころを1回投げて，5以上の目が出たときは点Pを正の向きに1だけ進め，4以下の目が出たときは負の向きに2だけ進める．9回投げるとき，点Pが3回目と9回目に原点の位置にくる確率を求めよ．

【Point Pickup】

反復試行について(2)

同じ試行を繰り返すとき，ある特定の事象が起こる「　　　」が問題になっているとき

①　「　　　」の試行におけるそれぞれの事象が起こる確率を求める．

②　起こる回数がわかっているので，出る順番を固定することで，「　　　」にて確率が求められる．

③　条件に従い「　　　　　　　で出たか」を求め，②とかけ算する．

< Note >

3 ［1］　1枚の硬貨を繰り返し投げる．表と裏がともに2回以上出るまで投げ続ける試行をするとき，ちょうど n 回投げたときに試行が終わる確率を求めよ．ただし，n は4以上の自然数である．

［2］　ボタンを押すと X，Y，Z いずれかの文字が画面に表示される機械がある．その機械では，X，Y が表示される確率は等しく，その確率は Z が表示される確率の2倍である．ボタンを5回続けて押すとき，X，Y，Z の文字が少なくとも1回表示される確率を求めよ．

【Point Pickup】

［1］「終了条件」について

終了する「　　　　　の条件」　＆　終了時の事象を考える．

［2］「少なくとも」「以上」「以下」について

「　　　　　」を狙うのが基本.

必ずしもそれでうまくいくわけではない.「事象ごとに確率が異なる」ときなどに注意.

< Note >

第８講　確率(2)

［1］　6 枚の白紙の札を横 1 列に並べ，左から順に 1 から 6 の番号をつける．1 個のさいころを投げ，出た目の番号の札を裏返す（すでに裏だったときは表にする）という操作を繰り返す．

(1)　すべて表の状態から操作を 2 回行ったとき，裏の札が 2 枚になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．

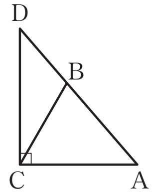
(2)　すべて表の状態から操作を 3 回行ったとき，裏の札が 1 枚になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．

［2］　1 個のさいころを 4 回投げる試行において，出た目がすべて偶数で 6 の目が 1 回だけ出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である．また出た目が偶数で，かつ 6 の目が少なくとも 1 回出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コサシス}}}$ である．

< Note >

第9講　三角比・平面図形

$\boxed{1}$ [1]　右図において　$AD=\sqrt{7}$, $AC=\sqrt{3}$, $BC=\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$, $\angle BCA=60^\circ$, $\angle DCA=90^\circ$ とする．このとき $\sin\angle CAB$ の値および AB の長さを求めよ．



[2]　x を正の実数とする．三角形 ABC において，$AB=x$，$BC=x+1$，$CA=x+2$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　x のとり得る値の範囲を求めよ．

(2)　三角形 ABC が鈍角三角形となる x の値の範囲を求めよ．

【Point Pickup】

[1]　三角比の定義

「　直角　」が絡む図形については，常にその利用を視野に入れておく．

正弦定理と余弦定理

三角形の3つの辺と3つの角の内，「　　　　つ」がわかれば発動．

「　　つの角（の三角比）がわかる」「　　がらみ」は正弦定理を積極的に狙うとよい．

それ以外は余弦定理の利用を視野に．

[2]　三角形の成立条件

正の数 a，b，c が三角形の3辺 $\Longleftrightarrow$「　$|b-c|<a<b+c$　」

特に a が最大辺のときは「$a<b+c$」のみで OK

鈍角・直角・鋭角三角形

「　　　　　」(「　　　　　」の対角）が鈍角か直角か鋭角か．

判別方法は「　　　　　　　　との比較」または「　　　　の値」

＜ Note ＞

$\boxed{2}$ 円に内接する四角形 ABCD において，$AB=7\sqrt{2}$，$BC=8$，$CD=\sqrt{2}$，$\angle ABC=45^\circ$ とする．

(1) 対角線 AC の長さを求めよ．

(2) 辺 AD の長さを求めよ．

(3) 四角形 ABCD の面積を求めよ．

(4) 対角線 BD の長さを求めよ．

【Point Pickup】

円に内接する四角形

① 対角の和 ＝「　　　　」→ sin の値は「　　　　　」　cos の値は「±　　　」

② 「　　　　　」によって２つの三角形に分けられる → 三角比へ

③ 外接円の半径 R は，その円に内接するどの三角形でも使える．

④ トレミーの定理

< Note >

$\boxed{3}$　$\angle$ACB が直角の $\triangle$ABC において，$\angle$BAC の二等分線と辺 BC との交点を D とする．また，AB＝20，BD＝15 とする．

(1)　CD：ACを求めよ．

(2)　線分 AD の長さを求めよ．

(3)　$\triangle$ABD の内接円の半径 r と外接円の半径 R を求めよ．

【Point Pickup】

角の二等分線

・性質　→「　　　　を分ける比」＝「　　　　の比」

・その長さ → 分けられた角が

有名角なら「全体の △ の面積 ＝ 分けられた三角形の面積の和」

有名角でないなら「大きい三角形」→「小さい三角形」

三角形の内接円の半径 r

⇒

＜ Note ＞

第9講　三角比・平面図形

［1］　円に内接する四角形 ABCD において，AB＝5，BC＝3，DA＝2，$\angle \mathrm{ABC}=60^\circ$ であるとき，CD＝$\boxed{\text{ア}}$，$\triangle \mathrm{BCD}=\dfrac{\boxed{\text{イウエ}}\sqrt{3}}{76}$，$\mathrm{BD}=\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\sqrt{19}}$ である．

［2］　△ABC の 3 辺の長さが AB＝6，BC＝5，CA＝4 である．このとき

$\cos\angle \mathrm{B}=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である．また，∠BAC の二等分線と辺 BC の交点を L とすると，

BL＝$\boxed{\text{ケ}}$，AL＝$\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ である．

< Note >

第 10 講　命題と証明

1 [1]　実数 a に対して，集合 A，B，C および全体集合 U が次のように定義されている．

$A=\{2,\ -a+5,\ a^2-2a+1,\ a^2+a-6\}$，$B=\{4,\ a^2-6a+8,\ a^2-6a+9\}$

$C=\{a^2-a-2,\ a^3-8a^2+19a-12\}$，　$U=A\cup B\cup C$

いま，$A\cap B\cap C=\{0\}$ のとき，以下のものを求めよ．

(1)　a の値　　(2)　集合 $A\cap B$ の要素　　(3)　集合 $(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cup C)$ の要素

[2]　α が無理数，a，b が有理数であるとき，$a+b\alpha=0$ ならば $a=b=0$ であることを証明せよ．

【Point Pickup】

[1]　集合について

2 つ以上の集合については，「　　　　　」などを利用し，包含関係や共通部分などを明らかにすること．

[2]　無理数とは

有理数とは「　　　　」で表される数.

実数のうち，有理数でない数を無理数という．代表例は「　　　」と「　　　」.

< Note >

$\boxed{2}$ [1]　次の各命題について，真であれば証明し，偽であれば反例を1つあげよ.

(1)　実数 a について，$\sqrt{a^2}$ と a は等しい

(2)　実数 x について，$|2x-1|=x$　ならば　$x=1$　である.

[2]　実数 x，y に対し，次の $\boxed{}$ に当てはまる最も適切なものを

①必要十分条件　②必要条件　③十分条件　④必要条件でも十分条件でもない

から1つ選べ.

「$x=1$ でないかまたは $y=1$」は $(x-1)(y-1)=0$ であるための $\boxed{}$

【Point Pickup】

[1]　真偽の判定

偽でなければ真．つまり「　　　　」がなければ真である.

「　　　　」とは，仮定や前提条件を満たすものの中で，結論が否定される例.

[2]　必要条件と十分条件

p（であること）は q であるための

十分条件　……　$p \Rightarrow q$　が真　　　　必要条件　……　$q \Rightarrow p$　が真

< Note >

$\boxed{3}$ 実数 x，y に関する以下の命題で正しいものは説明し，誤っているものは反例をあげよ．

(1) x と y が共に無理数であることは，$x+y$ が無理数であることの十分条件である．

(2) x と y のいずれかが無理数であることは，$x+y$ が無理数であることの必要条件である．

(3) x が有理数で y が無理数であることは，$x+y$ が無理数であることの十分条件である．

【Point Pickup】

閉じている，閉じていない

a，b がともに有理数のとき，$a+b$，$a-b$，$a\times b$，$\dfrac{a}{b}(b\neq 0)$ は「有理数　　　　　」

a，b がともに無理数のとき，$a+b$，$a-b$，$a\times b$，$\dfrac{a}{b}(b\neq 0)$ は「無理数　　　　　」

対偶および背理法

命題　$p \Rightarrow q$　について　(p：仮定　　q：結論)

・命題の真偽は，$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$（「　　　　」）の真偽と一致する．

・p のもとに $\overline{q}$ を仮定すると，「　　　　」する → 命題は真（「　　　　　」）

いずれも「　　　　を否定」すると見通しが明るくなる場合に有効．

< Note >

第 10 講　命題と証明

[1]　整数を要素とする 2 つの集合

$A=\{-3,\ 2,\ a^2-9a+25,\ 2a+3\}$，$B=\{-2,\ a^2-4a-10,\ a^2-5a+1,\ a+6,\ 16\}$

において，$A\cap B=\{2,\ 7\}$ とするとき，$\overline{A}\cap B=\{$ $\boxed{\text{アイ}}$，$\boxed{\text{ウエ}}$，$\boxed{\text{オカ}}$ $\}$ である．

[2]　次の各命題の真偽を調べよ．真ならば①，偽ならば②を選べ．

(1)　a が自然数ならば $\sqrt{a}$ は無理数である．

(2)　$a>0$ であるとき，a が無理数ならば $\sqrt{a}$ も無理数である．

[3]　自然数 n は，整数 m を用いて $n=3m$，$3m+1$，$3m+2$ の 3 通りに分類される．
このことを用いて，n^2 を 3 で割ると 1 余ることは，n を 3 で割ると 1 余るための何条件かを以下の①～④から選べ．

①　必要十分条件

②　必要条件であるが，十分条件ではない

③　十分条件であるが，必要条件ではない

④　必要条件でも十分条件でもない

< Note >

第11講　式と証明・高次方程式(1)

1　すべての実数 x に対し，$x^3+2x^2+3x+4=a(x-10)^3+b(x-10)^2+c(x-10)+d$ となるような定数 a，b，c，d を求めよ．

【Point Pickup】

x についての恒等式

x にどんな値を入れても成立する式．主な解法は次の①と②．

①係数比較法 …… 両辺を x に関して整理し，「　　　　　　」

②数値代入法 …… x の n 次式のとき，「　　　　」個の異なる x の値について成立

因数にもつ

x の関数 $f(x)$ において $f(\alpha)=0$ のとき

$f(x)$ は「　　　」で割り切れる（因数定理）$\Longleftrightarrow$ $f(x)$ は「　　　」を因数にもつ．

< Note >

$\boxed{2}$ [1] (1) 正の実数 a, b に対して, $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 4$ が成り立つことを証明せよ.

(2) 正の実数 a, b, c に対して, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geqq \dfrac{9}{a+b+c}$ が成り立つことを証明せよ.

[2] $x>0$, $y>0$ のとき, 不等式 $\left(9x+\dfrac{1}{y}\right)\left(4y+\dfrac{1}{x}\right) \geqq k$ が常に成り立つような k の値の最大値を求めよ.

【Point Pickup】

[1]　**不等式 $A \geqq B$ の証明**

「　　　　　」を計算し, 0以上であることを示す.

(相加平均) ≧ (相乗平均) の関係から

$a>0$, $b>0$ のとき

「　　　　　　　　」 等号成立は　　　　　のとき

[2]　**$f(x) \geqq k$ が常に成り立つ**

$\Rightarrow$ $f(x)$ の　　　　$\geqq k$ であればよい.

最小値を (相加平均) ≧ (相乗平均) の関係から導く

正の数 a, b について, 積 ab が一定のとき

和 $a+b$ の最小値は

等号が成立するときを明記し, 最小値の存在を明らかにすること.

< Note >

$\boxed{3}$ [1]　$z^2=-2i$ のとき，z を求めよ．ただし，$i^2=-1$ である．

[2]　2 次方程式 $x^2-x+1=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha^{10}+\beta^{10}$，$\alpha^6-2\alpha^3\beta^3+\beta^6$ の値を求めよ．

【Point Pickup】

[1]　複素数 $a+bi$

複素数 $z=a+bi$ (a，b は実数) について

$b=0$ なら，z は「　　　　」

$b\neq 0$ なら，z は「　　　　」(さらに $a=0$ なら「　　　　　　」)

相等　a，b，c，d が実数のとき　$a+bi=c+di \iff a=c$，$b=d$

[2]　1 の 3 乗根 ω

$x^2+x+1=0$ の虚数解を 1 つを ω とすると　$\omega^3=$　　，$\omega^2+\omega+1=0$

< Note >

第 11 講　式と証明・高次方程式(1)

［1］ $x^3-2x^2+7x-1=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$ が x についての恒等式であるとき，$a=\boxed{\text{ア}}$，$b=\boxed{\text{イ}}$，$c=\boxed{\text{ウ}}$ である．

［2］ $x>0$，$y>0$ のとき，不等式 $\dfrac{k}{x+y}\leqq\dfrac{1}{x}+\dfrac{49}{y}$ が常に成り立つような k の値の最大値は $\boxed{\text{エオ}}$ である．

［3］ 2 乗して $7+24i$ となる複素数は $\pm(\boxed{\text{カ}}+\boxed{\text{キ}}\,i)$ である．

< Note >

第12講　高次方程式(2)

$\boxed{1}$ [1]　x が $0<x<1$ と $x^2+\dfrac{1}{x^2}=3$ を満たすとき，x^3 の値を求めよ．

[2]　$x=2+\sqrt{3}\,i$ のとき，x^3-4x^2+8x+4 の値を求めよ．

【Point Pickup】

次数下げによる式の値の求め方

x が $g(x)=0$ を満たすとき，$f(x)$ の値を求める方法は主に次の①～④

①　x の値を $f(x)$ に代入

②　$g(x)$ を変形し，次数下げの式として利用

（例）　$x^2-2x-1=0 \Longleftrightarrow$

③　$f(x)\div g(x)$ を計算し，その「　　　　の値」を求める

④　$f(x)$ が分数式のとき，(分子)÷(分母) により分子の次数を下げる

（例）　$\dfrac{x+1}{x}=$

< Note >

$\boxed{2}$ ［1］ 3 次方程式　$x^3-ax^2+bx+a-6=0$　……①　について，次の問いに答えよ．

(1) 方程式①が $x=1$ を 2 重解にもつとき，定数 a，b の値，および残りの解を求めよ．

(2) 方程式①の実数解が $x=1$ のみで，他の 2 つの解が虚数解となるような a の値の範囲を求めよ．

［2］ 4 次方程式　$x^4-4x^3+7x^2-8x+4=0$　……①　について，次の問いに答えよ．

(1) $t=x+\dfrac{2}{x}$ とおき，①を t の式で表せ．

(2) 方程式①を複素数の範囲で解け．

【Point Pickup】

[1]　組立除法による因数分解

3 次以上の高次方程式を解くとき，2 次方程式における「　　　　」のようなシンプルな公式はない．よって，特殊な形を除き，解を見つけることが必要．

予想した解，または与えられた解をもとに，組立除法による因数分解を行うと効果的.

[2]　相反式

降べきの順に整理したとき，左右から数えて等しい順番の項について，その係数が等しい式．特殊な形ゆえの解法が存在する．

＜ Note ＞

$\boxed{3}$　3次方程式　$x^3+ax^2+bx+c=0$ の3つの解を α，β，γ とする．

(1)　$\alpha+\beta+\gamma=-a$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$，$\alpha\beta\gamma=-c$ が成り立つことを示せ．

(2)　$\alpha+\beta+\gamma=1$，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3$，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=7$ のとき，$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$ の値を求めよ．

【Point Pickup】

3次方程式の解と係数の関係

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の3解を α，β，γ とすると

$\alpha+\beta+\gamma=$　　　　，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=$　　　，$\alpha\beta\gamma=$

また，$\alpha+\beta+\gamma=l$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=m$，$\alpha\beta\gamma=n$ のとき

α，β，γ は3次方程式 「　　　　　　　　　　　　　　　」の3解

< Note >

第 12 講　高次方程式(2)

［1］ iを虚数単位とする．$x=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}\,i}$ のとき，$3x^3+4x^2+3x-1$ の値は

$\boxed{\text{アイ}}+\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}\,i$ である．

［2］ 4 次方程式 $x^4+ax^3+14x^2+16x+b=0$ ……① が $x=-2$ を 2 重解にもつとき，

$a=\boxed{\text{オ}}$，$b=\boxed{\text{カ}}$ である．

［3］ 3 次方程式 $x^3-2x^2+3x-6=0$ の実数解を α，虚数解を β，γ とするとき，

$\alpha=\boxed{\text{キ}}$ であり，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\boxed{\text{クケ}}$ である．

< Note >

第 13 講　図形と方程式(1)

$\boxed{1}$ ［1］　座標平面上の直線 $x+2y=6$ 上にあって，点 $(2,\ -3)$ との距離が最小になる点の座標を求めよ．

［2］　2 直線 $4x+3y-14=0$，$x-3y-11=0$ の交点を通り，直線 $x-y+4=0$ と直交する直線を求めよ．

【Point Pickup】

［1］　2 点間の距離

2 点 $(a,\ b)$，$(c,\ d)$ の距離は

2 直線が垂直 $\Longleftrightarrow$ 2 直線の「傾きの　　$=-1$」

図形的な処理

例えば「距離が最小」という問題が与えられたとき，距離が最小になるときの状態を「　　　」し，その状態になるための条件を考え，立式する．

［2］　2 曲線の交点を通る図形

2 曲線 $f(x,\ y)=0$，$g(x,\ y)=0$ の交点を通る図形は

$f(x,\ y)+\quad\times g(x,\ y)=0$　と表せる．

＜ Note ＞

$\boxed{2}$ ［1］ xy 平面上に 3 点 $\mathrm{A}(0,\ \sqrt{3})$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 0)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ がある．$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積が直線 $y=\sqrt{3}x+b$ で二等分されるように，定数 b の値を定めよ．

［2］ 直線 l：$px-(p+1)y+2p-1=0$（p は実数）が与えられている．

(1) 直線 l は，p の値に関わらずある定点を通る．その定点の座標を求めよ．

(2) 直線 l が $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で x 軸と交わるとき，p のとりうる範囲を求めよ．

【Point Pickup】

［1］ 図形の特徴をつかむ

与えられた座標や直線の傾きなどから，図形の特徴をつかむ．

「　　　　」が使われているときに注意．

［2］ 定点を通る直線

直線の式に文字が含まれているときは，その文字の「　　　　」になる場合がある．

恒等式となるときの x，y の値が，その直線の通る定点となる．

< Note >

$\boxed{3}$ [1]　点Ｐが円 $x^2-2x+y^2-2y-18=0$ の上を動くとき，点 $\mathrm{A}(4,\ 1)$ との距離 AP の最小値と最大値を求めよ．

[2]　2 点 $\mathrm{A}(4,\ -2)$，$\mathrm{B}(1,\ -3)$ を通り，中心が直線 $y=3x-1$ 上にある円の方程式を求めよ．

【Point Pickup】

[1]　**円外・円内の１点から円周上の点までの距離の最大・最小**

⇒ その点と円の「　　　　」を結ぶ直線がカギ.

[2]　**円の弦の性質**

・円の弦に中心から下ろした垂線は，弦を「　　　　」に「　　　　　」する.

・円の中心は，弦の「　　　　　　　　」上にある.

＜ Note ＞

第 13 講　図形と方程式(1)

［1］　2 直線 $2x+3y=1$，$3x+y=5$ の交点を通り，直線 $3x+2y=6$ に平行な直線の方程式は $y=-\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}x+\boxed{ウ}$ である.

［2］　直線 $(5k+3)x-(3k+5)y-10k+10=0$ が k の値によらず通る定点の座標は $(\boxed{エ},\ \boxed{オ})$ である.

［3］　3 点 A(5, 4)，B(1, 2)，C(6, 1) がある．線分 AB の垂直二等分線を表す式は $y=-\boxed{カ}x+\boxed{キ}$ である．また，3 点 A，B，C を通る円の中心の座標は $\left(\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}},\ \dfrac{\boxed{サシ}}{\boxed{ス}}\right)$ である.

< Note >

第 14 講　図形と方程式(2)

$\boxed{1}$　円 $C : x^2+y^2=25$ の接線のうち，傾きが 7 になるものを求めよ.

【Point Pickup】

円の接線

①　円の「　　　」と接線までの距離 ＝「　　　」

②　円と直線の式を連立してできた 2 次方程式で「　　　　　　　」

③　接線方程式

< Note >

2 ［1］ 平面上の3点A(0, 2), B(1, −2), C(−2, 0)に対し，$AP^2=BP^2+CP^2$を満たす点Pの軌跡を求めよ．

［2］ 点Pが円$x^2+y^2=4$の周上を動くとき，点A(8, 0)と点Pを結ぶ線分APをAQ：QP＝2：3に内分する点Qの軌跡を求めよ．

【Point Pickup】

条件を満たす点の軌跡

→ 軌跡を求めたい点を(x, y)とおき，x，yの満たす条件式から軌跡の形を判断する．

①先に(x, y)とおき，その点を使って条件式をたてる場合

②条件を満たす点を求めて，それを(x, y)をおきかえる場合

に大きく分かれる．

②の場合は，x，y座標に含まれる「　　　　　　」を消去し，1つの式につなげる必要がある．

< Note >

3 [1]　実数 x，y が 2 つの不等式 $x^2+y^2 \leqq 1$，$y \geqq 0$ を同時に満たすとき，$y-x$ の最小値と最大値を求めよ．

[2]　点 $(x,\ y)$ が領域 $3x+y \geqq 5$ を動くとき，x^2+y の最小値を求めよ．

【Point Pickup】

領域を満たす点の座標を用いた最大・最小

直線や曲線によって囲まれた領域内の点 $(x,\ y)$ を用いて $f(x,\ y)$ の最大・最小を考えるとき，

「$f(x,\ y)$　　　……①」とおき，「　」が最大・最小となるとき①の状態を考える．

領域の境界線の「　　　」がカギを握る．

また，境界が「　　　」の場合は，①がその境界と「　　　　」ときに注意．

＜ Note ＞

第 14 講　図形と方程式(2)

［1］　2 点 A$(-1,\ 4)$，B$(2,\ 1)$ に対して，AP：BP＝2：1 を満たす点 P の軌跡は，点 ($\boxed{\text{ア}}$ ，$\boxed{\text{イ}}$) を中心とする半径 $\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ の円である．この円と直線 $y=-x+k$ が接するとき，$k=-\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ である．

［2］　連立不等式 $y \geqq 0$，$x+y \leqq 4$，$2x+y \leqq 6$，$y-3x \leqq 12$ を満たす領域を D とする．点 $(x,\ y)$ が領域 D にあるとき，次の問いに答えよ．

(1)　$4x-y$ の最大値は $\boxed{\text{キク}}$ である．

(2)　$2y-x^2$ の最大値は $\boxed{\text{ケ}}$ である．

＜ Note ＞

第15講　三角関数

$\boxed{1}$ ［1］ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ に対して $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{4}{3}$ のとき，次の値を求めよ．

（1） $\sin\alpha\cos\alpha$　　（2） $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$

（3） $\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}$　　（4） $\sin\alpha$

［2］ $8\cos^2\theta-2\sin\theta-5=0$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ を満たす θ を求めよ．

【Point Pickup】

三角関数の相互関係

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　　$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　「　　　　　　　　」

$\sin\theta+\cos\theta=a$ $(\sin\theta-\cos\theta=a)$ の形

→「　　　」をすることで「　　　　　」の値を出す．

< Note >

$\boxed{2}$ ［1］ (1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin 2\theta - \sqrt{2}\cos\theta = 0$ を解け.

(2) $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，不等式 $\sin 2x + \sqrt{3}\sin x - \sqrt{3}\cos x > \dfrac{3}{2}$ を解け.

［2］ $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $3\sin\theta - 1 < \cos 2\theta$ を満たす θ の値の範囲を求めよ.

【Point Pickup】

加法定理（複号同順）

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \quad \cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \quad \sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \quad \tan\beta}{1 \quad \tan\alpha\tan\beta}$

倍角の公式

$\sin 2\theta = \qquad\qquad\qquad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \qquad\qquad =$

$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

＜ Note ＞

$\boxed{3}$ ［1］ $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数 $y=\sin^2\theta-\cos\theta$ の最大値，最小値を求めよ．

［2］ $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で，$\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta$ の最小値と，それをとる θ の値を求めよ．

【Point Pickup】

三角関数の最大，最小

→「　　　　」が基本．また，置き換えによる「　　関数」は頻出．

半角の公式

→ 倍角の公式から導く．

$\sin^2\theta=$ 　　　　　，$\cos^2\theta=$ 　　　　　，$\sin\theta\cos\theta=$

合成

$a\sin\theta+b\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha)$

$r=$ 　　　　，$\cos\alpha=\frac{\quad}{r}$，$\sin\alpha=\frac{\quad}{r}$

合成後は，角度の「　　　」に注意．

< Note >

第 15 講　三角関数

［1］　$\sin x+\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$\sin x\cos x=-\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，

$\sin^3 x+\cos^3 x=\dfrac{\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$ である．

［2］　不等式 $\cos 2\theta+\cos\theta\leqq 0$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の解は $\dfrac{\pi}{\boxed{カ}}\leqq\theta\leqq\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{カ}}\pi$ である．

［3］　関数 $y=2\cos\theta-\sin^2\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の最大値は $\boxed{ク}$，最小値は $-\boxed{ケ}$ である．

［4］　関数 $y=2\sqrt{3}\sin x\cos x+4\cos^2 x-2\sin^2 x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ は，$x=\dfrac{\pi}{\boxed{コサ}}$ のとき最大値をとる．

< Note >

第 16 講　指数関数・対数関数

1 [1]　実数 x が $4^x+4^{-x}=7$ をみたすとき，8^x+8^{-x} の値を求めよ．

[2]　$a=\log_2 5$，$b=\log_2 9$ のとき，$\log_4 150$ を a，b を用いて表せ．

[3]　a は正の実数で，$b=32a^3$ とする．$x=\log_2 b$，$y=\log_2 a$ とおくとき，y を x を用いて表せ．

【Point Pickup】

[1]　指数関数の「底の変換」

指数関数は，自分の好きな底に変えることは困難である．

$4=2^2$，$27=3^3$ のように「　　　　」で表し直すことで，底を目的のものに変換する．

指数関数 a^x の符号について

a^x の符号はつねに「　　」である．

逆に，a^x が 0 やマイナスになる x は「　　　　　　」．

[2]　対数関数の「底の変換」と「真数」について

底の変換公式　　$\log_a b=\dfrac{\log_c}{\log_c}$

また，真数を「　　　　　　」し，

$\log_a M^p=p\log_a M$

$\log_a M\times N=\log_a M+\log_a N$　，$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

などを用いて真数を小さくすることができる．

[3]　対数と指数の書き換え　　　$x=\log_a b \iff$

＜ Note ＞

$\boxed{2}$ [1]　方程式 $2\cdot 8^x-3\cdot 4^{x+1}+5\cdot 2^{x+1}+24=0$ を解け.

[2]　次の不等式を解け.

(1)　$\log_2 2x+\log_2(x-7)<2\log_2(x-3)$　　(2)　$\log_2(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(2-x)<0$

【Point Pickup】

[1]　指数方程式 $a^x=N$ について

$N>0$ のとき　x は「　　　　　」存在する.

$N=0$, $N<0$ のとき, x は「　　　　　　」.

対数で表す

$a^x=b$　より　$x=\log_a b$

[2]　対数の相等, 大小

$\log_a x_1=\log_a x_2 \iff x_1=x_2$

　　　　のとき　$\log_a x_1<\log_a x_2 \iff x_1<x_2$

　　　　のとき　$\log_a x_1<\log_a x_2 \iff x_1>x_2$

これを利用し, 対数方程式・不等式の解, 対数やその真数のとり得る値を出す.

また,「　　　条件」に注意.

< Note >

$\boxed{3}$ ［1］　関数 $y=3^{2x+1}-5\cdot 3^{x+1}$ $(-2\leqq x\leqq 1)$ の最大値，最小値を求めよ．

［2］ (1)　関数 $y=2(\log_{\frac{1}{2}}x)^2-4\log_{\frac{1}{2}}x$ $\left(\dfrac{1}{4}\leqq x\leqq 8\right)$ の最大値，最小値を求めよ．

(2)　$x>0$，$y>0$，$2x+y=8$ のとき，$\log_2 x+\log_2 y$ の最大値を求めよ．

【Point Pickup】

[1]　指数の大小

　　　　のとき　$x_1<x_2 \iff a^{x_1}<a^{x_2}$

　　　　のとき　$x_1<x_2 \iff a^{x_1}>a^{x_2}$

[2]　置き換え型ではない対数関数

→「1つ」の対数関数にする．

$a>1$　　のとき　　真数が最大 $\iff$ 対数の値は「　　　」

$0<a<1$　のとき　　真数が最大 $\iff$ 対数の値は「　　　」

＜ Note ＞

第 16 講　指数関数・対数関数

[1]（1）$2^x+2^{-x}=3$ のとき　$4^x+4^{-x}=\boxed{\text{ア}}$ である.

（2）$x=\log_{10}\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ のとき, $(10^x+10^{-x})(10^x-10^{-x})=\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$ である.

[2]（1）方程式 $8^x-3\cdot4^x-3\cdot2^{x+1}+8=0$ の解は　$x=\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オ}}$ である.

（2）不等式 $\log_2(x-1)-\log_{\frac{1}{2}}(x-3)<3$ の解は　$\boxed{\text{カ}}<x<\boxed{\text{キ}}$ である.

[3]（1）$y=4^x-2^{x+2}+1$ の $-1\leqq x\leqq 3$ における最小値は $-\boxed{\text{ク}}$ である.

（2）$f(x)=\log_2(x+7)+\log_2(1-x)$ は $x=\boxed{\text{ケコ}}$ のとき最大値をとる.

＜ Note ＞

第17講　微分法

$\boxed{1}$　$f(x)=2x^3-6x+1$ とし，曲線 $y=f(x)$ を C とする．

(1)　C 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式を求めよ．

(2)　(1)で求めた接線を y 軸方向に $+1$ 平行移動した直線を l とする．l が C に接するときの a の値を求めよ．

【Point Pickup】

$y=f(x)$ の接線の方程式

$y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(t,\ f(t))$ における接線 l について

l の傾きは「　　　」

l の方程式は

$y=f(x)$ と直線 l を「接する」状態にする

①　$y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(t,\ f(t))$ における接線の方程式 m を作り，
m と l を「　　　　　」する．

②　特に $f(x)$ が「　　関数」のとき，$f(x)$ と l の式を「　　　」させ，「　　　」とする．

< Note >

$\boxed{2}$ ［1］ 関数 $f(x)=x^3-3x^2-9x$ の極大値を M，極小値を m とする．

(1) M，m の値を求めよ．

(2) $m \leqq f(x) \leqq M$ が成り立つような x の値の範囲を求めよ．

［2］ 関数 $f(x)=2x^3+9x^2-3x-7$ が $x=\alpha$ で極大値 M をとり，$x=\beta$ で極小値 m をとるとき，$\beta-\alpha$，および $M-m$ の値を求めよ．

【Point Pickup】

［1］ 極値について

$y=f(x)$ が $x=\alpha$ の前後で

増加から減少に転じるとき，$f(\alpha)$ を「　　　　　」

減少から増加に転じるとき，$f(\alpha)$ を「　　　　　」という．

$f(x)$ の増減は $f'(x)$ の「　　　　」による．

「　　」ならその範囲で増加　　「　　」ならその範囲で減少

「　」ならその範囲で増加でも減少でもない

よって，$f'(\alpha)=0$ のとき，$x=\alpha$ で極値をとる「　　　　　　　　　」

［2］ 3 次関数 $f(x)$ が極値をとる x

2 次方程式 $f'(x)=0$ の解 α，β が「　　　　　　　　　　　」であれば，

$f(\alpha)$，$f(\beta)$ が極値となる．

$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$，$\alpha-\beta$ に関する問題は，「　　　　　　　　」が有効．

< Note >

$\boxed{3}$ 一辺の長さが１の正方形 ABCD を考える．点 P は，点 B，C を除いた辺 BC 上を動くとする．点 P を通り直線 AP と垂直な直線と辺 CD との交点を Q とする．線分 BP の長さを x とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\angle\mathrm{BAP}=\theta$ とするとき，$\angle\mathrm{CPQ}$ を θ を用いて表せ．

(2) $\triangle\mathrm{CPQ}$ の面積 S の最大値と，そのときの x の値を求めよ．

(3) 線分 AQ の長さ L の最小値と，そのときの x の値を求めよ．

【Point Pickup】

最大値・最小値

・変域の「　　　」の y 座標の値

・変域内の「　　　」

が最大・最小の候補となる．変域に注意．

< Note >

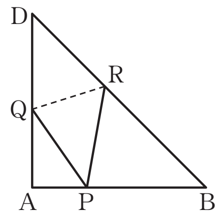
第17講　微分法

［1］　曲線 $y=x^3-5x^2+8x+11$ と直線 $y=mx+2$ が接するとき，$m=\boxed{\text{ア}}$ である．

［2］　$f(x)=x^3+ax^2+bx$ が $x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値をとる．このとき，

$$\alpha+\beta=-\frac{\boxed{\text{イ}}a}{\boxed{\text{ウ}}},\quad f(\alpha)+f(\beta)=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}a^3-\frac{2}{3}ab \text{ である．}$$

［3］　AB＝AD＝1，∠BAD＝90° の直角二等辺三角形 ABD を D が線分 AB 上の点 P にくるように折り，そのときにできる折り線を QR（Q は AD 上の点，R は BD 上の点）とする．DQ の長さを x とするとき，次の問いに答えよ．



(1)　△APQ の面積を S とするとき，

$$S^2=\frac{1}{4}\left(\boxed{\text{キ}}x^3-\boxed{\text{ク}}x^2+\boxed{\text{ケ}}x-1\right) \text{ である．}$$

(2)　S の最大値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である．

< Note >

第18講　積分法

1　曲線 $C: y=|x^2-4|$ と直線 $l: y=x+2$ について，次の問いに答えよ．

(1)　C のグラフをかけ．

(2)　C と l の交点の x 座標を求めよ．

(3)　C と l で囲まれた部分の面積を求めよ．

【Point Pickup】

$y=|f(x)|$ のグラフ

$y=f(x)$ のグラフにおいて，

x 軸より「　　」の部分はそのまま．

x 軸より「　　」の部分を上に折り返す．

よって $f(x)=0$，つまり $f(x)$ と x 軸との交点の x 座標が必要．

面積を積分で求める

・境界となる曲線や直線の「　　　　　　　　」を求める

・「　　　　　」を定める．

・$\int$ の式を立てる．グラフの上または下の式が変わる，また上下が入れ替わるところで $\int$ の式が複数に分かれる．

＜ Note ＞

$\boxed{2}$ [1]　2 つの放物線 $y=x^2-4x+5$ と $y=-x^2-2x+9$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

[2]　$a>0$ のとき，2 つの放物線 $y=x^2-2$，$y=-ax^2+ax-1$ について，次の問いに答えよ．

(1)　2 つの放物線の交点の x 座標を求めよ．

(2)　2 つの放物線で囲まれた図形の面積を求めよ．

【Point Pickup】

∫ の公式その①

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=$$

主に放物線と直線，放物線と放物線によって「　　　　　　」部分の面積に用いる．

< Note >

$\boxed{3}$ (1)　放物線 $C: y=x^2+x-1$ と直線 $l: y=2x+1$ の交点の座標を求めよ．

(2)　(1)で求めた交点の x 座標の大きい方を x_0 とする．$a>x_0$ とし，C と l で囲まれた領域の面積を S_1，C と l および直線 $x=a$ で囲まれた領域の面積を S_2，C と l および直線 $x=-a$ で囲まれた領域の面積を S_3 とする．$S_1=S_2+S_3$ となるときの a の値を求めよ．

【Point Pickup】

面積がマイナス？

$a \leqq x \leqq b$ において $f(x) \geqq g(x)$，つまり $f(x)$ のグラフが $g(x)$ のグラフより上にあるとき

$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$ は，$x=a$，$x=b$，$y=f(x)$，$y=g(x)$

によって囲まれた部分の面積である．このとき

$T=\int_a^b \{g(x)-f(x)\}dx$ は，$T=-\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=-S$ であることより，

囲まれた部分の面積にマイナスをつけたものと考えることができる．

< Note >

第18講　積分法

［1］　曲線 C：$y=|x^2-2x|$ と直線 l：$y=\dfrac{1}{2}x$ によって囲まれた面積は $\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$ である.

［2］　2つの放物線 $y=x^2-3x+2$, $y=-2x^2-x+3$ で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キク}}$ である.

＜ Note ＞

第19講　微分法・積分法

$\boxed{1}$　k は定数とし，方程式 $2x^3-9x^2+12x+k^2+7k=0$ について考える．この方程式が異なる3個の実数解をもつとき，k の値の範囲を求めよ．

【Point Pickup】

3次方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数

→ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解の個数は，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ と x 軸の共有点の個数.

よって $y=f(x)$ のグラフを描くために微分が必要.「　　　　　　」がカギを握る.

また,「　　　　　」が有効な手段となる場合もある.

＜ Note ＞

$\boxed{2}$ [1]　$f(x)=3x^2+\int_{-1}^{0}xf(t)dt+\int_{0}^{1}f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

[2]　$f(t)$ を t の 2 次関数とし，$g(x)=x+\int_{0}^{x}f(t)dt$ とする．$y=g(x)$ は，$x=1$ と $x=2$ で極値をとり，$x=\frac{3}{2}$ での $y=g(x)$ の接線の傾きが $\frac{3}{2}$ であるとする．このとき，$y=g(x)$ の極大値と極小値を求めよ．

【Point Pickup】

[1]　定積分関数その１

$\int_{a}^{b}f(t)dt$ は「　　　」 ⇒ 「　　　　　」が有効　　※$\int_{a}^{b}xf(t)dt=$

[2]　定積分関数その２

$\int_{a}^{x}f(t)dt=F(x)-F(a)$　より　　　　$\int_{a}^{x}f(t)dt=$

また，$x=a$ のとき　$\int_{a}^{a}f(t)dt=$

< Note >

3　2曲線 $C_1 : y=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$，$C_2 : y=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{5}{2}$ の両方に接する直線を l とするとき，次の問いに答えよ.

(1)　直線 l の方程式を求めよ.

(2)　2曲線 C_1，C_2 と直線 l で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

【Point Pickup】

∫の公式その②

$$\int (x-\alpha)^2 dx= \qquad\qquad +C$$

主に放物線と「　　　」，放物線と放物線が「　　　　」ときの面積がらみに用いる.

< Note >

第19講　微分法・積分法

［1］　a を実数とするとき，直線 l : $y=3x-a$ と曲線 C : $y=2x^3-3x$ の共有点の個数が 3 個となる a の範囲は　$-\boxed{\text{ア}}<a<\boxed{\text{イ}}$ である．

［2］　$f(x)=\displaystyle\int_{-2}^{2} xf(t)\,dt+1$ を満たす関数 $f(x)$ は $f(x)=\boxed{\text{ウ}}\,x+\boxed{\text{エ}}$ である．

［3］　直線 l は，傾きが正で，2 つの放物線 C_1 : $y=x^2$，C_2 : $y=4x^2+12x$ に接している．

(1)　直線 l の方程式は　$y=\boxed{\text{オ}}\,x-\boxed{\text{カ}}$ である．

(2)　放物線 C_1，C_2，および直線 l で囲まれた図形の面積を求めよ．

＜ Note ＞

第 20 講　数列(1)

$\boxed{1}$ [1]　初項 $a_1=1$，公差 $\dfrac{2}{3}$ の等差数列 $\{a_n\}$ と，初項 $b_1=2$，公差 $\dfrac{3}{2}$ の等差数列 $\{b_n\}$ がある．

(1)　数列 $\{a_n\}$ の項のうち，値が整数となる項を小さい方から順に並べてできる数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に共通に含まれる項を，小さい方から順に並べてできる数列 $\{q_n\}$ の一般項，および初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

[2]　公比が正の数である等比数列について，初めの 3 項の和が 21 であり，次の 6 項の和が 1512 であるという．この数列の初めの 5 項の和を求めよ．

【Point Pickup】

[1]　等差数列と等差数列の共通項

2 つの等差数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の共通項は「　　　　数列」をなす．

その公差は，$\{a_n\}$ の公差と $\{b_n\}$ の公差の「　　　　　　　　」である．

[2]　$1-r^n$ について

$r=1$ のとき $1-r^n=0$　　よって $1-r^n$ は $1-r$ を「　　　　　　　　」

$1-r^2=(1-r)(1+r)$　　　　$1-r^3=(1-r)(1+r+r^2)$

$1-r^n=(1-r)(1+r+r^2+\cdots\cdots+r^{n-1})$

n が偶数のとき，$n=2m$ とすると

$1-r^{2m}=1^2-(r^m)^2=$

< Note >

$\boxed{2}$ [1]　数列 7, 67, 667, 6667, …… の第 n 項を求めよ.

[2]　$a_n=n(n-1)+1$ で表される数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ.

[3]　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+k}$ を n の式で表せ.

【Point Pickup】

[1]　和の形で表されている数列

→ 一般項を出すために和を計算する．どのような数列かを見抜く必要がある.

考え方は「　　　　　」を用いた和と同様.

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を b_n とすると 「　　　　」のとき　$\displaystyle a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

[2]　和の記号 Σ の「公式」

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=$　　　　　　　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=$

[3]　部分分数分解

$$\frac{1}{(n+\alpha)(n+\beta)}=\frac{1}{\qquad}\left(\frac{1}{n+\alpha}-\frac{1}{n+\beta}\right)$$

$\alpha<\beta$ の形で分解に入るとよい.

< Note >

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ について，初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n(2n+1)$ となるとき，次の問に答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ を初項 1，公比 2 の等比数列とし，数列 $\{c_n\}$ を $c_n=a_nb_n$ とする．数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和 T_n を求めよ．

【Point Pickup】

和から一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n-S_{n-1}=a_n \quad (n \geqq 2 \text{ のとき}), \qquad S_1=a_1$$

ずらし法

一般項が「(　　　)×(　　　)」の形となっているときの和は，和を列挙し，

それに「　　　」をかけたものを別に用意し，2 式の差をとるとよい．

< Note >

第 20 講　数列(1)

[1]　初項 1，公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ と，初項 2，公差 7 の等差数列 $\{b_n\}$ に共通に含まれる項を，小さい方から順に並べてできる数列 $\{c_n\}$ の一般項は $c_n=\boxed{\text{アイ}}\,n-\boxed{\text{ウエ}}$ である．

[2]　数列 1，11，111，1111，11111，…… の第 n 項は $\dfrac{\boxed{\text{オカ}}^{\,n}-1}{\boxed{\text{キ}}}$ である．

[3]　$a_n=n^2+3n+2$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{n}{\boxed{\text{ク}}\,(n+\boxed{\text{ケ}})}$ である．

[4]　$S=1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+4\cdot 3^3+5\cdot 3^4+6\cdot 3^5$ とおくと，$S=\boxed{\text{コサシス}}$ である．

< Note >

第 21 講　数列(2)

1　2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある．

　① $a_1=2$，$a_2=42$　　② $b_n=a_{n+1}-a_n$ で，$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n-4$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

を満たすとき，つぎの問に答えよ．

(1)　数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

【Point Pickup】

特性方程式型漸化式

$a_{n+1}=pa_n+q$ の形をした漸化式は，特性方程式「$\alpha=p\alpha+q$」を用意して差をとると「　　　　　型」の漸化式になる．「　　　　」のずれに注意．

階差型漸化式

$a_{n+1}=a_n+f(n)$ の形をした漸化式は，$f(n)$ が a_n の「　　　　　　」である．

＜ Note ＞

$\boxed{2}$　一般項が $a_k=2k-1$ の数列に，次のような規則で縦棒による区切りを入れて区分けする．その規則とは，区分けされた n 番目の部分（これを第 n 群と呼ぶことにする）が $2n-1$ 個の項からなるように区切るものである．

$1\,|\,3,\ 5,\ 7\,|\,9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17\,|\,19,\ 21,\ 23,\ 25,\ 27,\ 29,\ 31\,|\,33,\ 35,\ 37,\ \cdots\cdots$

このとき，例えば第3群は9，11，13，15，17の5つの項からなるので，第3群の初項は9，末項は17，中央の項は3番目の13である．また，第3群の総和は $9+11+13+15+17=65$ であり，15は第3群の第4項である．

(1)　第 n 群の末項を n の式で表せ．

(2)　第 n 群の初項，中央の項を n の式で表せ．

(3)　第 n 群の項の総和 $S(n)$ を n の式で表せ．

(4)　2013は第何群の第何項か．

【Point Pickup】

群数列

第 n 群に含まれる「　　　　」がカギ．

その「　　　」を求めることで，第 n 群の末項，初項がもとの数列の何番目の項かがわかる．

群に属すると仮定

ある数字が第何群の何番目の項かを調べたいときは，もとの数列の何番目かを調べる．

その上で，その数字が第 n 群に属すると仮定すると，「　　　」で挟み込むことができる．

< Note >

$\boxed{3}$ [1]　$n \geqq 2$ であるような自然数 n に対して

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots\cdots+(n-1)\cdot n\cdot(n+1)=(1+2+3+\cdots\cdots+n)(2+3+\cdots\cdots+n)$$

が成り立つことを示せ.

[2]　次の式で定められる数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ.

$$a_1=5 \quad , \quad a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{8}{a_n} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　すべての自然数 n に対して　$a_n>4$ が成り立つことを示せ.

(2)　すべての自然数 n に対して　$a_{n+1}<a_n$ が成り立つことを示せ.

【Point Pickup】

[1]　証明したい式を変形

等式や不等式の証明において，同値性を崩さずに計算・変形できる部分があれば
それを行った後の式を証明すべき式としてもよい.

個数に注意

数列の和が，項を列挙する形で表されているときは，特にその「　　　　」に注意.

[2]　数学的帰納法による不等式の証明

成り立つと仮定した式が不等式ならば，それを示したい式に用いる際に「　　　　　　　」が発生する.

また不等式の証明 A＞B の証明は「　　　　　」を計算して「　　　」であることを示すのが基本.

< Note >

第21講　数列(2)

[1]　$b_1=2$，$b_{n+1}-b_n=a_n$（$n=1, 2, 3, \cdots\cdots$）で表される数列 $\{b_n\}$ がある．また数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2$（$n=1, 2, 3, \cdots\cdots$）で定められている．このとき，

$a_n=\boxed{ア}\cdot\boxed{イ}^{n-1}-\boxed{ウ}$ であり，$b_n=\boxed{エ}^{n-1}-n+\boxed{オ}$ である．

[2]　自然数 1，2，3，…… を，第 n 群に $2n-1$ 個の項を含むように群に分ける．

$$1\,|\,2,\ 3,\ 4\,|\,5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\,|\,10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16\,|\,17,\ 18,\ 19,\ \cdots\cdots$$

(1)　第 n 群の最初の項は　$n^2-\boxed{カ}n+\boxed{キ}$ である．

(2)　第 n 群に含まれる数の和は　$(\boxed{ク}n-1)(n^2-n+\boxed{ケ})$ である．

(3)　365 は第 $\boxed{コサ}$ 群の $\boxed{シ}$ 番目の項である．

＜ Note ＞

第22講　平面ベクトル(1)

1 [1]　△OAB において，OA$=\sqrt{7}$，OB$=1$，AB$=\sqrt{3}$ とする．このとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ．

[2]　ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$，$\vec{c}=(2,\ 1)$ とする．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ として次の問に答えよ．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，および $\cos\theta$ の値を求めよ．

(2)　t を実数とし，$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ とおく．$\vec{p}$ と $\vec{c}$ が垂直であるとき，および平行であるときの t の値をそれぞれ求めよ．

【Point Pickup】

[1]　ベクトルの内積

$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ 　　　　$\Leftrightarrow$　$\cos\theta=$

ベクトルの分割　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{O}\quad}-\overrightarrow{\mathrm{O}\quad}$

大きさ $|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}|$ は，「　　」することで「　　計算」に持ち込むことができる．

[2]　成分表示によるベクトルの内積

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき

$|\vec{a}|=$ 　　　　　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=$

また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が

垂直 $\Longleftrightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ 　　つまり

平行 $\Longleftrightarrow$ $\vec{a}=\quad\vec{b}$ 　つまり $\begin{cases} a_1=\quad b_1 \\ a_2=\quad b_2 \end{cases}$ より

< Note >

$\boxed{2}$ [1]　△OAB において，辺 OA を 2：3，辺 OB を 3：4 に内分する点をそれぞれ D，E とする．また，線分 AE と線分 BD の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

[2]　△ABC の辺 BC を 2：1 に内分する点を P とし，線分 AP 上に点 Q がある．等式 $4\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+2\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\vec{0}$ が成り立つとき，$\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QP}}$ の値を求めよ．

【Point Pickup】

[1]　**1次結合**

平面上のベクトル $\vec{p}$ は，同じ平面上の「　　　　」である2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ と実数 s，t を用いて　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ の形で「　　　　　　」に表せる．

内分を表すベクトル

線分 AB を

$s:t$ に内分する点を P とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\qquad\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\qquad\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$t:(1-t)$ に内分する点を Q とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\qquad\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\quad\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

[2]　**ベクトルの伸縮**

直線 AB 上に点 P があるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\quad\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　と表せる．

＜ Note ＞

$\boxed{3}$ 平行四辺形 OABC について，辺 AB を 1：2 に内分する点を D とし，線分 CD を 3：4 に内分する点を E とする．また，直線 OE と辺 BC との交点を F とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(2) △CEF の面積は平行四辺形 OABC の面積の何倍か．

【Point Pickup】

「平行」を含む図形

$\vec{a}$ と $\vec{p}$ が平行のとき，$\vec{p}=k\vec{a}$ と表せる．よって，平行を含む図形では「　　　　　」によるベクトルの表現が有効である．

< Note >

第22講　平面ベクトル(1)

［1］ △ABCにおいて，AB＝1，AC＝5，BC＝$2\sqrt{5}$ のとき，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\boxed{ア}$ である．

［2］ 2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$，$\vec{c}=(2,\ -2)$ について，$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{c}$ が垂直となるのは $t=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$ のときであり，平行となるのは $t=\boxed{エオ}$ のときである．

［3］ 平行四辺形OABCにおいて，辺AB上に点DをAD：DB＝2：1となるようにとり，BCの中点をEとする．直線ODと直線AEの交点をFとするとき，

$\dfrac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OD}}=\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$，$\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AE}}=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である．

< Note >

第23講　平面ベクトル(2)

1　3点O，A，Bがあり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくと，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{5}{6}$ が成り立っている．OAの中点をPとし，半直線AB上に $\mathrm{AB}:\mathrm{AH}=1:s\ (s>0)$ となる点Hをとる．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を s，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2)　直線OHと直線ABが垂直に交わるような s の値を求めよ．

(3)　(2)のとき，直線OHと直線PBの交点をQとする．$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

【Point Pickup】

ベクトルによる内分点と外分点の表現

点Pが直線AB上にあるとき，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　より　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$　つまり　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

「　　　　　」のとき　　　Pは線分ABを内分する点

「　　　　　　　　」のとき　Pは線分ABを外分する点

< Note >

$\boxed{2}$　半径1の外接円をもつ三角形ABCの外心をOとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．$2\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ．

(2)　辺ABの長さを求めよ．

(3)　三角形ABCの面積を求めよ．

【Point Pickup】

ベクトルの相等と大きさ

$\vec{a}=\vec{b}$ のとき　$|\vec{a}|=|\vec{b}|$　　　　$\vec{a}=-\vec{b}$ のとき　$|\vec{a}|=$

つまり，ベクトルの向きは大きさには関係がない．

ベクトルを用いた三角形の面積

三角形OBAの面積 S，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とすると

$S=$

特に，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき　$S=\dfrac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$

< Note >

$\boxed{3}$　三角形 ABC を１辺の長さが１の正三角形とする．以下の問いに答えよ．

(1)　実数 s，t が $s+t=1$ を満たしながら動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす点 P の軌跡 G を正三角形 ABC とともに図示せよ．

(2)　実数 s，t が $s\geqq0$，$t\geqq0$，$1\leqq s+t\leqq2$ を満たしながら動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす点 P の存在範囲 D を正三角形 ABC とともに図示し，領域 D の面積 S を求めよ．

【Point Pickup】

ベクトルの終点が表す軌跡・領域

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が１次独立のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$（$s$，$t$ は実数）を満たす点 P は平面 ABC 上の「　　　　　　　」を表す．

s，t に条件をつけると，それに応じて点 P の表す軌跡・領域が決定する．

$s+t=1$ のとき　　　　　　　　「　　　　　」

$s+t=1$，$s\geqq0$，$t\geqq0$ のとき　「　　　　　」

$s+t=k$ のときは，k で「　　　」ことにより，動く直線の描く領域として考えることができる．

< Note >

第23講　平面ベクトル(2)

［1］　1辺の長さが1の正三角形OABにおいて，辺ABを3：1に内分する点をP，辺OBの中点をQとする．直線PQ上の点Sを，OA⊥OSとなるようにとる．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とすると，点Sは直線PQ上の点より

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{\boxed{\text{ア}}}(1-t)\vec{a}+\left(\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ア}}}-\frac{t}{\boxed{\text{ア}}}\right)\vec{b}$$ と表される．

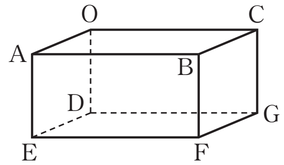
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\boxed{\text{ウ}}$ より $t=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ となる．このとき $|\overrightarrow{\mathrm{OS}}|=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である．

［2］　半径1の外接円をもつ三角形ABCの外心をOとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおく．$\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}=\vec{0}$であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$であり，$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{コサ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$である．

＜ Note ＞

第 24 講　空間ベクトル

$\boxed{1}$　直方体 OABC-DEFG において，OA＝OD＝1，OC＝2 とし，辺 EF の中点を M とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ とし，点 P から線分 CM におろした垂線と線分 CM との交点を H とする．$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおくとき，以下の問いに答えよ．



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，t を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，t を用いて表せ．

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|^2$ の最小値を求めよ．

【Point Pickup】

長さが１の辺を内分

AB＝1 のとき

・辺 AB を $t:1-t$ に内分する点を P とすると　AP＝　，BP＝

・$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表すと，AP＝

つまり，長さが１の線分を基準とすると，比や伸縮率がそのまま長さとなり得る．

「たどり」の選択

問題の設定や誘導により，平行に限らず「たどり」が有効な場合がある．

特に空間ベクトルにおいては，たどることを視野に入れて解き進めるとよい．

< Note >

$\boxed{2}$ ［1］　直方体 OADB-CEGF において，直線 OG と平面 DEF の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

［2］　四面体 OABC において線分 OA の中点を K，線分 OB を 1：3 に内分する点を L，△ABC の重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{KL}}$，$\overrightarrow{\mathrm{KG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

(2)　3 点 K，L，G で定まる平面と線分 BC の交点を N とする．N が線分 BC を $t:(1-t)$ に内分するとき，t の値を求めよ．

【Point Pickup】

空間における1次結合

空間上の任意の点 P は，1 次独立である 3 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形でただ 1 通りに表せる．

平面上にある点の表現

点 P が平面 ABC 上にあるとき

①　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$s+t+u=1$

②　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}})$

が主な表し方である．

< Note >

3　座標平面において，3点 A(3, 2, 0)，B(2, 3, 1)，C(2, 0, −1) の定める平面を α とし，原点 O から平面 α に垂線 OH を下ろす.

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ.

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 s，t を求めよ.

(3)　点 H の座標を求めよ.

(4)　4点 O，A，B，C を頂点とする四面体 OABC の体積を求めよ.

【Point Pickup】

平面に下ろした垂線の足

点 P から平面 ABC に垂線を下ろし，その交点を H とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\qquad=0$　かつ　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\qquad=0$

つまり，平面上の1次独立な「　　」のベクトルと垂直である.

くくり出しと大きさ

$\vec{a}=(ma_1,\ ma_2,\ ma_3)=$　　　　　　　　より　　$|\vec{a}|=$

< Note >

第24講　空間ベクトル

［1］　四面体OABCにおいて，辺OAを$3:1$に内分する点をD，辺OBを$2:1$に内分する点をE，辺ACを$2:1$に内分する点をFとする．3点D，E，Fが定める平面をαとし，平面αと辺BCとの交点をGとする．kを実数として$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ ……①　と表し，BG：GCを求める．

s，t，uを実数として$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=s\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t\overrightarrow{\mathrm{OE}}+u\overrightarrow{\mathrm{OF}}$と表すと$s+t+u=\boxed{\text{ア}}$　……②

であり，これを変形すると　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\left(\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}s+\dfrac{u}{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

……③　と表せる．①，③を比較し，②を考慮すると　BG：GC$=\boxed{\text{カ}}:\boxed{\text{キ}}$である．

［2］　空間の3点A(1，0，0)，B(0，2，0)，C(0，0，3)を通る平面をαとし，原点Oから平面αに垂線OHを下ろす．内積$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$の値は$\boxed{\text{ク}}$である．また，$s$，$t$を実数として$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$と表したとき，$s=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{49}$，$t=\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{49}$であり，OHの長さは

$\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$である．

< Note >

テキスト解答

第１講　数と式

$\boxed{1}$ ［1］　$2x^2y+5xy^2-6x^2+2y^3-6y^2-15xy$ を因数分解せよ.

$$\begin{aligned}
&2x^2y+5xy^2-6x^2+2y^3-6y^2-15xy\\
&=(2y-6)x^2+(5y^2-15y)x+2y^3-6y^2\\
&=2(y-3)x^2+5y(y-3)x+2y^2(y-3)\\
&=(y-3)(2x^2+5yx+2y^2)\\
&=\boldsymbol{(y-3)(2x+y)(x+2y)}
\end{aligned}$$

$\boxed{1}$ ［2］　$\dfrac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，

$a^2b+a^2+2ab^2+2ab+b^3+b^2$ の値を求めよ.

$$\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\frac{(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{2\sqrt{2}-2+2-\sqrt{2}}{2-1}=\sqrt{2}$$

$1<\sqrt{2}<2$ より，$a=1$，$b=\sqrt{2}-1$

このとき　(※)

$$\begin{aligned}
&a^2b+a^2+2ab^2+2ab+b^3+b^2\\
&=(b+1)a^2+(2b^2+2b)a+b^3+b^2\\
&=(b+1)a^2+2b(b+1)a+b^2(b+1)\\
&=(b+1)(a^2+2ab+b^2)\\
&=(b+1)(a+b)^2=\sqrt{2}(\sqrt{2})^2\\
&=\boldsymbol{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

(別解)　(※)

このとき　$a=1$ を代入して

$$\begin{aligned}
&a^2b+a^2+2ab^2+2ab+b^3+b^2\\
&=b+1+2b^2+2b+b^3+b^2\\
&=b^3+3b^2+3b+1\\
&=(b+1)^3\\
&=(\sqrt{2})^3\\
&=2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

2 ［1］ (1) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}$ を簡単にせよ．

(2) $\dfrac{1}{p-\sqrt{6}}=1-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ を満たす p の値を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}$

$=\dfrac{1}{(1+\sqrt{3})+(\sqrt{2}+\sqrt{6})}+\dfrac{1}{(1+\sqrt{3})-(\sqrt{2}+\sqrt{6})}$

$=\dfrac{\{(1+\sqrt{3})-(\sqrt{2}+\sqrt{6})\}+\{(1+\sqrt{3})+(\sqrt{2}+\sqrt{6})\}}{(1+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2}$ ……(※)

$=\dfrac{2+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}-(8+4\sqrt{3})}=\dfrac{2(1+\sqrt{3})}{-2(2+\sqrt{3})}=-\dfrac{(1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$

$=-(\sqrt{3}-1)=\mathbf{1-\sqrt{3}}$

(別解)

$(※)=\dfrac{2(1+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})^2-\{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})\}^2}=\dfrac{2(1+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})^2-2(1+\sqrt{3})^2}=\dfrac{2(1+\sqrt{3})}{-(1+\sqrt{3})^2}$

$=\dfrac{2}{-(1+\sqrt{3})}=-\dfrac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=-\dfrac{2(\sqrt{3}-1)}{2}=1-\sqrt{3}$

(2) $\dfrac{1}{p-\sqrt{6}}=1-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ より

$p-\sqrt{6}=\dfrac{1}{1-\sqrt{\dfrac{3}{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=-2-\sqrt{6}$

よって　$\boldsymbol{p=-2}$

2 ［2］ $\sqrt{5+\sqrt{21}}-\sqrt{5-\sqrt{21}}$ を簡単にせよ．

$\sqrt{5+\sqrt{21}}-\sqrt{5-\sqrt{21}}=\sqrt{\dfrac{10+2\sqrt{21}}{2}}-\sqrt{\dfrac{10-2\sqrt{21}}{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\mathbf{\sqrt{6}}$

(別解)　$x=\sqrt{5+\sqrt{21}}$，$y=\sqrt{5-\sqrt{21}}$ とおき，$x-y$ を求める．

$x^2+y^2=5+\sqrt{21}+5-\sqrt{21}=10$　つまり　$(x-y)^2+2xy=10$ ……①

$xy=\sqrt{(5+\sqrt{21})(5-\sqrt{21})}=\sqrt{25-21}=2$ ……②

①に②を代入して　$(x-y)^2+4=10$　$(x-y)^2=6$

$x>y$ より　$x-y>0$　ゆえに　$x-y=\sqrt{6}$

$\boxed{3}$ ［1］　実数 x，y が $x+y=5$，$x^3+y^3=50$ を満たすとき，xy，x^2+y^2，x^5+y^5 の値を求めよ．

$x^3+y^3=50$ より　$(x+y)^3-3xy(x+y)=50$

これに　$x+y=5$ を代入して　$125-15xy=50$　　よって　$\boldsymbol{xy=5}$

このとき

$$\boldsymbol{x^2+y^2}=(x+y)^2-2xy=5^2-2\cdot5=\mathbf{15}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x^5+y^5}&=(x^3+y^3)(x^2+y^2)-x^3y^2-x^2y^3\\&=(x^3+y^3)(x^2+y^2)-(xy)^2(x+y)=50\cdot15-5^2\cdot5\\&=\mathbf{625}\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ ［2］　$a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=3$，$a^3+b^3+c^3=2$ のとき，$ab+bc+ca$，abc の値を求めよ．

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ より

$1^2=3+2(ab+bc+ca)$　　よって　$\boldsymbol{ab+bc+ca=-1}$

また，$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ より

$2-3abc=1\cdot\{3-(-1)\}$　　よって　$\boldsymbol{abc=-\dfrac{2}{3}}$

第2講　1次不等式・2次方程式

1 (1) 不等式 $2ax \leqq 6x+1$ を解け．ただし，a は定数とする．
(2) $x \geqq -6$ であるすべての x に対し，不等式 $2ax \leqq 6x+1$ が成り立つような定数 a の範囲を求めよ．

(1) $2ax \leqq 6x+1$　より　$(2a-6)x \leqq 1$

$2a-6>0$　つまり　$a>3$ のとき　$x \leqq \dfrac{1}{2a-6}$

$2a-6=0$　つまり　$a=3$ のとき　$0 \cdot x \leqq 1$　　よって　すべての実数 x で成り立つ．

$2a-6<0$　つまり　$a<3$ のとき　$x \geqq \dfrac{1}{2a-6}$

以上より

$a>3$ のとき　$x \leqq \dfrac{1}{2a-6}$　　$a=3$ のとき　すべての実数　　$a<3$ のとき　$x \geqq \dfrac{1}{2a-6}$

(2) $2ax \leqq 6x+1$　……①

$a>3$ のとき　①の解は　$x \leqq \dfrac{1}{2a-6}$

よって　$x \geqq -6$ の範囲に，①が成り立たない x が存在する．

$a=3$ のとき　①の解は　すべての実数

よって　$x \geqq -6$ の範囲のすべての x で①は成り立つ．

$a<3$ のとき　①の解は　$x \geqq \dfrac{1}{2a-6}$

これが $x \geqq -6$ の範囲のすべての x で成り立つのは　$\dfrac{1}{2a-6} \leqq -6$　のとき．

$a<3$ より　$1 \geqq -6(2a-6)$　　よって　$a \geqq \dfrac{35}{12}$

$a<3$ より　$\dfrac{35}{12} \leqq a < 3$

以上より，求める定数 a の範囲は　**$\dfrac{35}{12} \leqq a \leqq 3$**

2 ［1］　$k>1$ とする．2次方程式 $kx^2+(1-2k)x-2=0$ の2つの解を α，β とする．2次方程式 $x^2-2(k+1)x+4k=0$ の解の1つは β であり，もう1つの解を γ とする．

(1)　β を求めよ．

(2)　$\beta-\alpha=\gamma-\beta$ が成り立つとき，k の値を求めよ．

(1)　$kx^2+(1-2k)x-2=0$　より　$(kx+1)(x-2)=0$

$k>1$ より　$x=-\dfrac{1}{k}$，2　　これらが α，β

$x^2-2(k+1)x+4k=0$　より　$(x-2k)(x-2)=0$

よって　$x=2k$，2　　これらが　β，γ

よって　$\boldsymbol{\beta=2}$

(2)　(1)より　$\alpha=-\dfrac{1}{k}$，$\gamma=2k$

$\beta-\alpha=\gamma-\beta$　より　$\alpha+\gamma=2\beta$　　よって　$-\dfrac{1}{k}+2k=4$

$2k^2-4k-1=0$　　$k>1$ より　$\boldsymbol{k=\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}}$

2 ［2］　実数 x の方程式 $x^2-(k-1)x-k^2=0$ と $x^2-2kx+k=0$ がただ1つの共通解を持つとき，k の値を求めよ．また，それぞれの k に対応する共通解を求めよ．

$x^2-(k-1)x-k^2=0$　……①　　$x^2-2kx+k=0$　……②

①と②が共通解 α をもつとき

$\alpha^2-(k-1)\alpha-k^2=0$　……③　　$\alpha^2-2k\alpha+k=0$　……④

③－④より

$(k+1)\alpha-k^2-k=0$　　$(k+1)\alpha-k(k+1)=0$　　$(k+1)(\alpha-k)=0$

よって　$k=-1$，$\alpha=k$

$k=-1$ のとき　①，②はともに $x^2+2x-1=0$　となる．

この2次方程式の判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=1^2-1\cdot(-1)=2>0$

よって①と②は共通な実数解を2つもち，不適

$\alpha=k$ のとき　③より　$k^2-(k-1)k-k^2=0$　　$(k-1)k=0$　　よって　$k=0$，1

$k=0$ のとき　①より　$x^2+x=0$　　②より　$x^2=0$

よって①と②は共通解 $x=0$ をただ1つもつ

$k=1$ のとき　①より　$x^2-1=0$　　②より　$x^2-2x+1=0$

よって①と②は共通解 $x=1$ をただ1つもつ．

以上より　**$k=0$ のとき　共通解　$x=0$**　　**$k=1$ のとき　共通解　$x=1$**

3 ［1］ x についての2次方程式 $x^2-px+\dfrac{p^2-1}{4}=0$ の2つの解を x_1，x_2 とするとき，$|x_1-x_2|$ の値を求めよ．

$x^2-px+\dfrac{p^2-1}{4}=0$　より　$4x^2-4px+(p+1)(p-1)=0$

$(2x-p-1)(2x-p+1)=0$　　よって　$x=\dfrac{p+1}{2}$，$\dfrac{p-1}{2}$　　これらが x_1，x_2

したがって　$|x_1-x_2|=\left|\dfrac{p+1}{2}-\dfrac{p-1}{2}\right|=|1|=\mathbf{1}$

(別解)　$x^2-px+\dfrac{p^2-1}{4}=0$ の2解が x_1，x_2 のとき，解と係数の関係から

$x_1+x_2=p$，$x_1x_2=\dfrac{p^2-1}{4}$

このとき　$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=p^2-4\cdot\dfrac{p^2-1}{4}=1$

よって　$x_1-x_2=\pm 1$　　したがって　$|x_1-x_2|=1$

3 ［2］ x についての2次方程式 $x^2+px+q=0$ が，異なる2つの解 α, β をもつとする．2次方程式 $x^2+qx+p=0$ が $\alpha(\beta-2)$，$\beta(\alpha-2)$ を2解にもつとき，p，q の値を求めよ．

$x^2+px+q=0$ の2解が α，β より，解と係数の関係から

$\alpha+\beta=-p$，　$\alpha\beta=q$

このとき

$\alpha(\beta-2)+\beta(\alpha-2)=2\alpha\beta-2(\alpha+\beta)=2q-2(-p)=2p+2q$

$\alpha(\beta-2)\cdot\beta(\alpha-2)=\alpha\beta(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta\{\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4\}$

$=q(q+2p+4)=q^2+2pq+4q$

$\alpha(\beta-2)$，$\beta(\alpha-2)$ が $x^2+qx+p=0$ の2解であることより，

$q=-\{\alpha(\beta-2)+\beta(\alpha-2)\}=-2p-2q$　……①

$p=\alpha(\beta-2)\cdot\beta(\alpha-2)=q^2+2pq+4q$　……②

①より　$p=-\dfrac{3}{2}q$　　これを②に代入して　$-\dfrac{3}{2}q=q^2+2\left(-\dfrac{3}{2}q\right)q+4q$

$4q^2-11q=0$　　$q(4q-11)=0$　　よって　$q=0$，$\dfrac{11}{4}$

$q=0$ のとき　$p=0$

このとき　$x^2+px+q=0$　……③　より　$x^2=0$　　$x=0$

よって　$\alpha=\beta=0$ となり，α，β が異なることに反し不適

$q=\dfrac{11}{4}$ のとき　$p=-\dfrac{33}{8}$

このとき③より　$x^2-\frac{33}{8}x+\frac{11}{4}=0$　　この判別式を D とすると

$D=\left(-\frac{33}{8}\right)^2-4\cdot1\cdot\frac{11}{4}=\frac{1089}{64}-\frac{704}{64}>0$ より　α，β は異なる 2 実数解である.

以上より　$\boldsymbol{p=-\frac{33}{8}}$，$\boldsymbol{q=\frac{11}{4}}$

第3講　2次関数(1)

$\boxed{1}$ [1]　放物線　$C : y=2x^2-3x+5$ について，次の問いに答えよ．

(1)　C の頂点の座標を求めよ．

(2)　C を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 平行移動し，さらに原点に関して対称に移動した放物線の方程式を求めよ．

(1)　$C : y=2x^2-3x+5=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{31}{8}$　　よって頂点の座標は　$\left(\boldsymbol{\dfrac{3}{4}},\ \boldsymbol{\dfrac{31}{8}}\right)$

(2)　放物線 C を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 平行移動すると，頂点は $\left(\dfrac{7}{4},\ \dfrac{15}{8}\right)$ へ移動する．

さらに原点に関して対称に移動すると，頂点は $\left(-\dfrac{7}{4},\ -\dfrac{15}{8}\right)$ へ移動し，グラフは上に凸となる．よって，求める放物線の方程式は

$y=-2\left(x+\dfrac{7}{4}\right)^2-\dfrac{15}{8}$　つまり　$\boldsymbol{y=-2x^2-7x-8}$

(別解)　$y=2x^2-3x+5$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 平行移動した放物線の方程式は

$y+2=2(x-1)^2-3(x-1)+5$　つまり　$y=2x^2-7x+8$

この放物線と原点に関して対称な放物線の方程式は

$-y=2(-x)^2-7(-x)+8$　　したがって　$y=-2x^2-7x-8$

$\boxed{1}$ [2]　放物線 C と x 軸に関して対称な放物線は点 $(1,\ 1)$ を通り，y 軸に関して対称な放物線は点 $(1,\ -1)$ を通り，原点に関して対称な放物線は点 $(2,\ 0)$ を通る．放物線 C の式を求めよ．

求める放物線 C の方程式を　$y=ax^2+bx+c$ とおく．

C が 3 点 $(1,\ -1)$，$(-1,\ -1)$，$(-2,\ 0)$ を通るので

$$\begin{cases} a+b+c=-1 \\ a-b+c=-1 \\ 4a-2b+c=0 \end{cases}$$

これらより　$a=\dfrac{1}{3}$，$b=0$，$c=-\dfrac{4}{3}$　　したがって求める式は　$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{4}{3}}$

2 ［1］ 2次関数のグラフが $(-1,\ 6)$，$(5,\ 6)$ を通るとき，このグラフの軸の方程式を求めよ．さらにこのグラフが点 $(1,\ -2)$ を通るとき，この2次関数の最小値を求めよ．

2点 $(-1,\ 6)$，$(5,\ 6)$ を通る2次関数のグラフの軸は，グラフの対称性より　$\boldsymbol{x=2}$

よって条件を満たす2次関数は　$y=a(x-2)^2+q$　……①　とおける．

これが3点 $(-1,\ 6)$，$(5,\ 6)$，$(1,\ -2)$ を通るので

$6=9a+q$，$-2=a+q$　　これらより　$a=1$，$q=-3$

したがって①は　$y=(x-2)^2-3$　より　**最小値は -3**　($x=2$ のとき)

2 ［2］ a を定数とする．x の2次関数 $y=3x^2+ax+\dfrac{2}{3}a$ について，次の問いに答えよ．

(1) y の最小値 m を a を用いて表せ．　(2) m を最大とする a の値を求めよ．

(1) $y=3x^2+ax+\dfrac{2}{3}a=3\left(x+\dfrac{a}{6}\right)^2-\dfrac{a^2}{12}+\dfrac{2}{3}a$

したがって最小値 m は　$\boldsymbol{m=-\dfrac{1}{12}a^2+\dfrac{2}{3}a}$　$\left(x=-\dfrac{a}{6}\right.$ のとき$\left.\right)$

(2) $m=-\dfrac{1}{12}(a-4)^2+\dfrac{4}{3}$　　よって m を最大にする a は　$\boldsymbol{a=4}$

3 関数 $f(x)=x^2-6x+10$ について，次の設問に答えよ．

(1) $f(x)$ の $0\leqq x\leqq 5$ における最大値および最小値を求めよ．

(2) a を正の定数とする．このとき，$f(x)$ の $0\leqq x\leqq a$ における最大値を求めよ．

(3) b を定数とする．このとき，$f(x)$ の $b\leqq x\leqq b+3$ における最大値を b の式で表せ．

(1) $f(x)=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$

よって　$0\leqq x\leqq 5$ における　**最大値　10（$x=0$ のとき）**　　**最小値　1（$x=3$ のとき）**

(2) $0\leqq x\leqq a$ における最大値は

$0<a<6$ のとき　$f(0)=\boldsymbol{10}$

$a\geqq 6$ のとき　$f(a)=\boldsymbol{a^2-6a+10}$

(3) $b\leqq x\leqq b+3$ における最大値は

$b\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき　$f(b)=\boldsymbol{b^2-6b+10}$

$\dfrac{3}{2}\leqq b$ のとき　$f(b+3)=\boldsymbol{b^2+1}$

第4講　2次関数(2)

1 [1]　2次不等式 $x^2+x-2 \leqq 0$ の解を求めよ．また，2次不等式 $x^2+x-2 \leqq |x|$ の解を求めよ．

$x^2+x-2 \leqq 0$　より　$(x+2)(x-1) \leqq 0$

よって　$\boldsymbol{-2 \leqq x \leqq 1}$

$x^2+x-2 \leqq |x|$　に関して

$x \geqq 0$ のとき　$x^2+x-2 \leqq x$　$x^2-2 \leqq 0$　$-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$

$x \geqq 0$ より　$0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$

$x<0$ のとき　$x^2+x-2 \leqq -x$　$x^2+2x-2 \leqq 0$　$-1-\sqrt{3} \leqq x \leqq -1+\sqrt{3}$

$x<0$ より　$-1-\sqrt{3} \leqq x < 0$

以上より　$\boldsymbol{-1-\sqrt{3} \leqq x \leqq \sqrt{2}}$

1 [2]　a を実数とする．2次不等式 $x^2-ax+(a-1) \leqq 0$　……①　について次の問いに答えよ．

(1)　不等式①を解け．

(2)　不等式①を満たす整数 x の個数がちょうど3個であるような a の値の範囲を求めよ．

(1)　$x^2-ax+(a-1) \leqq 0$　……①　より　$(x+1-a)(x-1) \leqq 0$

$x^2-ax+a-1=0$ の解は　$x=a-1,\ 1$

よって不等式①の解は

$a-1<1$　つまり　**$a<2$ のとき　$a-1 \leqq x \leqq 1$**

$a-1=1$　つまり　**$a=2$ のとき　$x=1$**

$a-1>1$　つまり　**$2<a$ のとき　$1 \leqq x \leqq a-1$**

(2)　①を満たす整数 x の個数がちょうど3個であるのは

$a<2$ のとき　$-2<a-1 \leqq -1$　つまり　$-1<a \leqq 0$

$a>2$ のとき　$3 \leqq a-1<4$　つまり　$4 \leqq a<5$

したがって，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{-1<a \leqq 0,\ 4 \leqq a<5}$

$\boxed{2}$ [1]　2次不等式 $x^2+2(a+2)x+2a^2+a-6>0$ が任意の実数 x に対して成り立つような定数 a の範囲を求めよ.

$x^2+2(a+2)x+2a^2+a-6>0$ が任意の実数 x で成り立つのは
2次方程式 $x^2+2(a+2)x+2a^2+a-6=0$ が実数解をもたないとき.
よって，この式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(a+2)^2-(2a^2+a-6)=-a^2+3a+10<0$$

$(a+2)(a-5)>0$　　よって　$a<-2,\ 5<a$

$\boxed{2}$ [2]　不等式 $kx^2+(2k-3)x+2k-1\geqq 0$ がすべての実数 x に対して成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ.

$kx^2+(2k-3)x+2k-1\geqq 0$　……①

$k=0$ のとき　①は　$-3x-1\geqq 0$　　$x\leqq -\dfrac{1}{3}$　　よって　$-\dfrac{1}{3}<x$ では成り立たず不適

$k\neq 0$ のとき　①がすべての実数 x で成り立つのは

$k>0$　かつ　2次方程式 $kx^2+(2k-3)x+2k-1=0$ の判別式 D について $D\leqq 0$ のとき.

$D=(2k-3)^2-4k(2k-1)=-4k^2-8k+9\leqq 0$

$4k^2+8k-9\geqq 0$　　$k\leqq \dfrac{-2-\sqrt{13}}{2},\ \dfrac{-2+\sqrt{13}}{2}\leqq k$

$k>0$ より　$\dfrac{-2+\sqrt{13}}{2}\leqq k$　　　よって求める k の値の範囲は　$\boldsymbol{k\geqq \dfrac{-2+\sqrt{13}}{2}}$

3　2次方程式 $x^2+2ax+4a+12=0$ ……①　について，次の問いに答えよ．ただし，a は定数とする．

(1)　方程式①が重解をもつとき，a の値とその重解を求めよ．

(2)　方程式①が異なる2つの負の解をもつとき，a の値の範囲を求めよ．

(3)　方程式①が負の解をもつとき，a の値の範囲を求めよ．

(1)　$x^2+2ax+4a+12=0$　が重解をもつのは，判別式を D とすると　$D=0$ のとき．

よって　$\dfrac{D}{4}=a^2-(4a+12)=a^2-4a-12=0$

$a^2-4a-12=0$　　$(a-6)(a+2)=0$　　したがって　$\boldsymbol{a=-2,\ 6}$

$\boldsymbol{a=-2}$ のとき　①式は

$x^2-4x+4=(x-2)^2=0$

より　$\boldsymbol{x=2}$

$\boldsymbol{a=6}$ のとき　①式は

$x^2+12x+36=(x+6)^2=0$

より　$\boldsymbol{x=-6}$

(2)　$f(x)=x^2+2ax+4a+12$　とおくと

$f(x)=(x+a)^2-a^2+4a+12$　　軸：$x=-a$

①が異なる2つの負の解をもつのは，

$-a<0$　　つまり　$a>0$

$a^2-4a-12>0$　　つまり　$a<-2,\ 6<a$

$f(0)=4a+12>0$　　つまり　$a>-3$

これらをすべて満たす a の値の範囲は　$\boldsymbol{a>6}$

(3)　①が負の解をもつのは(ⅰ)，(ⅱ)のいずれか

(ⅰ)　①が2つの負の解をもつ（重解含む）　(ⅱ)　①が1つの負の解をもつ

(ⅰ)のとき　(1)および(2)より　$a\geqq 6$

(ⅱ)のとき

$f(0)=0$ となるのは　$a=-3$ のとき

このとき　①は $x^2-6x=0$　$x(x-6)=0$　$x=0,\ 6$

よって負の解をもたず不適

$f(0)<0$ のとき　$a<-3$　このとき①は正の解と負の解をもつ

以上より，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{a<-3,\ 6\leqq a}$

第５講　場合の数(1)

1　5 個の数字 0，1，2，3，4 から異なる 3 個を並べて 3 桁の整数をつくる．
(1)　3 桁の整数は全部で何個できるか．
(2)　偶数は何個できるか．また，9 の倍数は何個できるか．
(3)　偶数でなく 9 の倍数でもないものは何個できるか．

(1)　百の位は，0 を除く 4 通り
その各々について，残り 2 桁は　${}_4P_2$ 通り．
よって　3 桁の整数は全部で　$4\times{}_4P_2=4\times4\cdot3=$**48（個）**

(2)　偶数となるのは，一の位が 0，2，4 のとき．
一の位が 0 のとき　残り 2 桁は　${}_4P_2=12$（通り）
一の位が 2，4 のとき　残り 2 桁は　$3\times3=9$（通り）
よって　偶数は全部で　$12+9\times2=$**30（個）**
9 の倍数となるのは，各位の数の和が 9 の倍数となるとき．
和が 9 になるのは 3 桁の数字が 2，3，4 のとき
これらの順列を考えて，$3!=3\cdot2\cdot1=6$（通り）
和が 9 の倍数となるのはこのときのみ．
したがって　9 の倍数は　**6 個**

(3)　3 桁の整数が偶数でも 9 の倍数でもないのは
(i)　一の位が 1　　(ii)　一の位が 3 かつ他の位が 2 と 4 ではない
(i)のとき　残り 2 桁は　$3\times3=9$（通り）
(ii)のとき　百，十の位が同時に 2 と 4 になるのは　$2!=2$（通り）より
$3\times3-2=7$（通り）
したがって　偶数でも 9 の倍数でもないのは　$9+7=$**16（個）**

（別解）
偶数かつ 9 の倍数となるのは，3 桁の数字が 2，3，4 かつ一の位が偶数のときで
$2\times2!=4$（通り）
よって　偶数または 9 の倍数となるのは　$30+6-4=32$（個）
したがって　偶数でも 9 の倍数でもないのは　$48-32=16$（個）

$\boxed{2}$ ［1］　A，A，B，B，B，C，C，C，C の 9 個の文字全部を使って作ることができる順列の総数を求めよ．またそのうち，2 個の A が連続している順列，3 個の B がどれも連続しない順列はそれぞれ何通りあるか求めよ．

A，A，B，B，B，C，C，C，C の 9 個の順列は　$\dfrac{9!}{2!3!4!}=\mathbf{1260}$ **（通り）**

2 個の A が連続している順列は　○，B，B，B，C，C，C，C の 8 個の順列

よって　$\dfrac{8!}{3!4!}=\mathbf{280}$ **（通り）**

3 個の B がどれも連続しない順列は，まず A，A，C，C，C，C を並べ．次にその間および両端の 7 カ所中 3 カ所を選び，そこに B を 1 個ずつ入れたとき．

よって　$\dfrac{6!}{2!4!}\times{}_7C_3=\mathbf{525}$ **（通り）**

$\boxed{2}$ ［2］　赤玉 1 個，青玉 4 個，白玉 4 個がある．同じ色の玉は区別しないものとする．これら 9 個の球を左から右へ 1 列に並べるとき，左右対称になる並べ方の総数を求めよ．また，円形に並べる並べ方の総数を求めよ．

左右対称になる並べ方は，真ん中に赤玉を置き，その左右に青玉，白玉が 2 個ずつある場合．左右のいずれかの一方の並び方を決めれば，もう一方の並び方は 1 つに決まる．

よって　$\dfrac{4!}{2!2!}\times 1=\mathbf{6}$ **（通り）**

円形に並べる方法は，赤玉を置いたとき，残りの青玉 4 個，白玉 4 個の並べ方で

よって　$\dfrac{8!}{4!4!}=\mathbf{70}$ **（通り）**

$\boxed{3}$ ［1］ A，B，C，D，E，F の 6 文字を全部使ってできる文字列を，アルファベット順の辞書式に並べるとき，DECFBA は何番目か.

左端が A である文字列は　$5!=120$（個）．左端が B，C である場合も同様.
左端が DA，DB，DC である文字列はそれぞれ　$4!=24$（個）
左端が DEA，DEB である文字列はそれぞれ　$3!=6$（個）
左端が DECA，DECB である文字列はそれぞれ　$2!=2$（個）
ここまでに　$120\times3+24\times3+6\times2+2\times2=448$（個）
この後に DECFAB，DECFBA と続くので，DECFBA は **450 番目**

$\boxed{3}$ ［2］ 次を満たす 5 桁の自然数の総数を求めよ.
　(1) 各桁が 1 か 2 で，1 と 2 の両方が用いられている自然数
　(2) 各位が 1，2，3 で，それらすべてが用いられている自然数

(1) 各位が 1，2 の 2 種類である 5 桁の自然数は　$2^5=32$（個）
　このうち，1 だけ，または 2 だけでできる 5 桁の自然数は　11111，22222 の 2 個
　したがって求める個数は　$32-2=$**30（個）**
(2) 各位が 1，2，3 の 3 種類である 5 桁の自然数は　$3^5=243$（個）
　このうち
　　1 種類だけでできる 5 桁の自然数は　3 個
　　2 種類だけでできる 5 桁の自然数は　${}_3C_2\times(2^5-2)=90$（個）
　したがって求める個数は　$243-3-90=$**150（個）**

第6講　場合の数(2)

1 ［1］　ケーキ5個とアイスクリーム3個がある．ケーキもアイスクリームもすべて種類が異なるとき，次の問いに答えよ．

(1)　ケーキ2個とアイスクリーム1個を選ぶ方法は何通りあるか．

(2)　特定の2個を含むように4個を選ぶ方法は何通りあるか．

(3)　アイスクリームを少なくとも1個含むように3個選ぶ方法は何通りあるか．

(1)　${}_5C_2\times{}_3C_1=10\times3=\mathbf{30}$ **（通り）**

(2)　特定の2個を含むとき，残りの6個の中から2個選ぶ方法は　${}_6C_2=\mathbf{15}$ **（通り）**

(3)　8個の中から3個選ぶ方法は　${}_8C_3=56$（通り）

このうち，アイスクリームを1個も選ばない方法は　${}_5C_3=10$（通り）

よって，アイスクリームを少なくとも1個含む選び方は　$56-10=\mathbf{46}$ **（通り）**

1 ［2］　8人乗りの乗り物が2台ある．10人の人をこれら2台の乗り物に分乗させたい．

(1)　人も乗り物も区別しないで分乗させる方法は何通りあるか．

(2)　人は区別しないが，乗り物は区別して分乗させる方法は何通りあるか．

(3)　人も乗り物も区別して分乗させる方法は何通りあるか．

(1)　人も乗り物も区別しないとき，10人の人数の分け方は

(8，2)，(7，3)，(6，4)，(5，5) の **4通り**

(2)　(1)において乗り物を区別するとき，人数の組合せが

(8，2)，(7，3)，(6，4) のとき　それぞれ　$2!=2$（通り）

(5，5) のとき　1通り　　　よって　$2\times3+1=\mathbf{7}$ **（通り）**

(3)　(2)においてさらに人も区別するとき，それぞれの乗り物に乗る人の決め方について人数の組合せが

(8，2) のとき　${}_{10}C_8=45$（通り）　　(7，3) のとき　${}_{10}C_7=120$（通り）

(6，4) のとき　${}_{10}C_6=210$（通り）　　(5，5) のとき　${}_{10}C_5=252$（通り）

したがって　$2\times(45+120+210)+1\times252=\mathbf{1002}$ **（通り）**

（別解）　2台の乗り物をA，Bとする．

10人のそれぞれがA，Bを選ぶ方法が　$2^{10}=1024$（通り）

このうち，乗り物の定員を超えるのは，人数の組合せが

(10，0) のとき　2通り　　(9，1) のとき　$2!\times{}_{10}C_9=20$（通り）

よって　$1024-(2+20)=1002$（通り）

$\boxed{2}$ 6 枚の異なるカードがある.

(1) 2 枚ずつ A, B, C の 3 人に配る方法は何通りあるか.

(2) 2 枚ずつ 3 つの組に分ける方法は何通りあるか.

(3) どの人も少なくとも 1 枚は受け取るように A, B, C の 3 人に配る方法は何通りあるか.

(1) A が 6 枚中 2 枚を選び, その後 B が残り 4 枚中 2 枚を選ぶと, 残りの 2 枚が C である.

よって　${}_6C_2\times{}_4C_2\times1=\mathbf{90}$ **(通り)**

(別解)　A, A, B, B, C, C の順列を考え, 順に 6 枚のカードを対応させる方法で

$\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$ (通り)

(2) (1)において, A, B, C の区別をなくすと 3! 通りずつ同じ組合せがある.

よって　$\dfrac{90}{3!}=\mathbf{15}$ **(通り)**

(3) どの人も少なくとも 1 枚受け取る方法は, 枚数の組合せが以下の場合.

(i) (4, 1, 1)　　(ii) (3, 2, 1)　　(iii) (2, 2, 2)

(i)のとき

3 人の枚数の決め方が $\dfrac{3!}{2!}=3$ (通り)　　カードの決め方が ${}_6C_4\times{}_2C_1=30$ (通り)

よって　$3\times30=90$ (通り)

(ii)のとき　$3!\times{}_6C_3\times{}_3C_2=360$ (通り)

(iii)のとき　(1)より 90 通り

以上より　$90+360+90=\mathbf{540}$ **(通り)**

(別解)　6 枚のカードのそれぞれを A, B, C に配る方法が $3^6=729$ (通り)

このうち, 1 枚ももらわない人がいる場合を除く.

誰か 1 人がすべて受け取る方法が　3 通り

2 人のみが受け取る方法は

その 2 人の決め方が ${}_3C_2=3$ (通り)　　カードの配り方が $2^6-2=62$ (通り)

よって　$3\times62=186$ (通り)

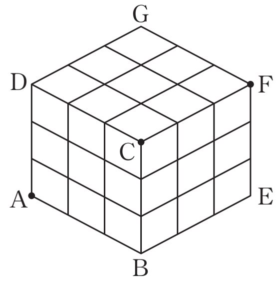
よって, どの人も少なくとも 1 枚受け取る方法は　$729-(3+186)=540$ (通り)

$\boxed{3}$ 図のように立方体の隣接する3つの面 ABCD，BEFC，CFGD 上にそれぞれ縦横等間隔の線を描き，その線の上を通ることができるとする．次のそれぞれの場合に最短距離で通る道順は何通りあるかを求めよ．

(1) 面 ABCD 上で A から C へ行く場合

(2) 面 ABCD，BEFC 上で A から F へ行く場合

(3) 面 ABCD，BEFC，CFGD 上で A から F へ行く場合



AB 方向に1区画行くことを a，AD 方向に1区画行くことを b と表す．

(1) A から C までの最短経路の数は，3個の a と3個の b の順列の総数に等しく，それは6区画行くうち，a となる3つを選ぶ方法に等しい．

よって $\dfrac{6!}{3!3!}={}_6C_3=\mathbf{20}$ **（通り）**

(2) 2面 ABCD，BEFC 上での A から F までの最短経路の数は，6個の a と3個の b の順列の総数に等しく，それは9区画行くうち，b となる3つを選ぶ方法に等しい．

よって $\dfrac{9!}{6!3!}={}_9C_3=\mathbf{84}$ **（通り）**

(3) 2面 ABCD，CFGD 上での A から F までの最短経路の数は，(2)同様84通り．
この経路と(2)の経路には，面 ABCD と辺 CF を通って A から F へ行く場合の重複があり，その場合の数は(1)を用いて　$20\times1=20$（通り）
したがって経路の数は　$84\times2-20=\mathbf{148}$ **（通り）**

第7講　確率(1)

1	[1]　5枚のカードA，B，C，D，Eを横1列に並べるとき，次の確率を求めよ． (1)　中央のカードがCではない確率 (2)　AとB，またはBとCが隣り合う確率

並べ方は全部で5! 通り．

(1)　中央のカードがCである並べ方は，他の4枚のカードの並べ方で4! 通りある．

よって中央のカードがCである確率は　$\dfrac{4!}{5!}=\dfrac{1}{5}$

したがって，中央のカードがCでない確率は　$1-\dfrac{1}{5}=\boldsymbol{\dfrac{4}{5}}$

(2)　AとBが隣り合う並べ方は　$2!\times4!$（通り）

BとCが隣り合う並べ方も同様　$2!\times4!$（通り）

AとBが隣り合い，かつBとCが隣り合う並べ方は　$2!\times3!$（通り）

よって，AとB，またはBとCが隣り合う確率は

$$\frac{2!\times4!\times2-2!\times3!}{5!}=\frac{2\cdot4\times2-2}{5\cdot4}=\frac{8-1}{10}=\boldsymbol{\frac{7}{10}}$$

1	[2]　0，1，2，3，4，5の6個の数字から，3個の数字を1つずつ取り出し，取り出した順に並べて数をつくる．このとき，3桁の数になる確率を求めよ．また，3桁の偶数になる確率を求めよ．

0，1，2，3，4，5の6個の数字から，3個の数字を1つずつ取り出し，取り出した順に並べる方法は，異なる6個から異なる3個を取り出す順列の総数で，${}_6P_3=6\cdot5\cdot4$（通り）

3桁の数になるのは，左端が0以外の5通りになるとき．

このとき残り2個の数字の並べ方が　${}_5P_2=5\cdot4$（通り）

よって，3桁の数になる確率は　$\dfrac{5\cdot5\cdot4}{6\cdot5\cdot4}=\boldsymbol{\dfrac{5}{6}}$

3桁の偶数になるのは，一の位が0，2，4となるとき．

一の位が0のとき　残りの2個の数字の並べ方が　$5\cdot4$ 通り

一の位が2，4のとき　左端に0が入らないことを考慮すると，その並べ方は $4\cdot4$ 通り

よって，3桁の偶数になる確率は　$\dfrac{5\cdot4+4\cdot4\times2}{6\cdot5\cdot4}=\dfrac{5+4\times2}{6\cdot5}=\boldsymbol{\dfrac{13}{30}}$

(3桁の偶数の別解)

3桁の奇数になるのは，一の位が1または3または5のとき

残りの2個の数字の並べ方が　$4\cdot4$ 通り

よって　3桁の奇数になる確率は　$\dfrac{4\cdot4\times3}{6\cdot5\cdot4}=\dfrac{2}{5}$

したがって，3桁の偶数になる確率は　$\dfrac{5}{6}-\dfrac{2}{5}=\dfrac{25-12}{30}=\dfrac{13}{30}$

$\boxed{2}$ 1から6までの異なる数字を1つずつ書いた6枚のカードがある．このカードをA，B，Cの3人に2枚ずつ配る．

(1) 1，2の数字を書いたカードが2枚ともAに配られる確率を求めよ．

(2) 1，2の数字を書いたカードが2枚とも3人のいずれかに配られる確率を求めよ．

(3) A，B，Cに2枚ずつ配られたカードの和がそれぞれ等しい確率を求めよ．

(4) A，B，Cに2枚ずつ配られたカードの和がそれぞれ6以上となる確率を求めよ．

6枚のカードの配り方は ${}_6C_2\times{}_4C_2=15\times6=90$（通り）

(1) 1，2がAに配られるとき，B，Cに配るカードの決め方が　${}_4C_2=6$（通り）

よって求める確率は　$\dfrac{6}{90}=\boldsymbol{\dfrac{1}{15}}$

(2) 1，2がBに配られる確率，Cに配られる確率はともに(1)より　$\dfrac{1}{15}$

よって求める確率は　$\dfrac{1}{15}\times3=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$

(3) 6枚のカードの数字の和は $1+2+3+4+5+6=21$　より

3人に配られたカードの和がそれぞれ等しいとき，その和は $21\div3=7$　である．

和が7になる数字の組合せは　(1，6)，(2，5)，(3，4) の3通り．

1と6，　2と5，　3と4をA，B，Cに配る方法は　3! 通り

よって求める確率は　$\dfrac{3!}{90}=\dfrac{6}{90}=\boldsymbol{\dfrac{1}{15}}$

(4) 3人に配られたカードの和がそれぞれ6以上になる2つの数字の組合せは

(i) (1，6)，(2，5)，(3，4)　　(ii) (1，6)，(2，4)，(3，5)

(iii) (1，5)，(2，6)，(3，4)　　(iv) (1，5)，(2，4)，(3，6)

(i)〜(iv)のいずれの場合も，その組合せとなる確率は(3)より　$\dfrac{1}{15}$

したがって求める確率は　$\dfrac{1}{15}\times4=\boldsymbol{\dfrac{4}{15}}$

$\boxed{3}$ [1]　4つの袋があり，各袋に赤，青，黄の玉が1つずつ入っている．各袋から1つずつ玉を取り出すとき，取り出した4つの玉がすべて同じ色である確率を求めよ．また，取り出した玉の色が2種類である確率を求めよ．

玉の取り出し方は全部で　$3^4=81$（通り）

このうち，取り出した玉の色がすべて同じになるのは

すべて赤，すべて青，すべて黄の3通り　　よってその確率は　$\dfrac{3}{81}=\boldsymbol{\dfrac{1}{27}}$

色が2種類になるとき

その2種類の色の組合せは　${}_3C_2=3$（通り）

それぞれの袋からその2種類のどちらの色を取り出すかが　2^4 通り
このうち，すべて同じ色になる場合が　2通り．
よって求める確率は　$\dfrac{3\times(2^4-2)}{81}=\mathbf{\dfrac{14}{27}}$

$\boxed{3}$ [2]　A，Bの2人を含む9人を3人ずつ3つのグループに無作為に分ける． (1)　A，Bが異なるグループとなるのは何通りあるか求めよ． (2)　A，Bが同じグループとなる確率を求めよ．

(1)　A，Bが異なるグループとなるとき
　Aと同じグループに入る2人の決め方が　${}_7C_2$ 通り
　Bと同じグループに入る2人の決め方が　${}_5C_2$ 通り
　残りの3人で1つのグループとなる．
よって求める場合の数は　${}_7C_2\times{}_5C_2=21\times10=$**210（通り）**

(2)　9人を3人ずつ3つのグループに分ける方法は　$\dfrac{{}_9C_3\times{}_6C_3}{3!}=280$（通り）
また，AとBに関しては同じグループに入るか異なるグループに入る場合しかない．
よって(1)よりAとBが同じグループに入る場合の数は　$280-210=70$（通り）
したがって求める確率は　$\dfrac{70}{280}=\mathbf{\dfrac{1}{4}}$

第8講　確率(2)

1　1つのさいころを3回投げるとき，1回目に出た数を X，2回目に出た数を Y，3回目に出た数を Z とする．このとき，次の確率を求めよ．

(1)　$X=Y$ である確率　　(2)　$X<Y$ である確率

(3)　$X=Y=Z$ である確率　　(4)　$X<Y<Z$ である確率

(1)　$X=Y$ となるのは　$(X,\ Y)=(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6)$ の6通り

よって求める確率は　$\dfrac{6}{6^2}=\mathbf{\dfrac{1}{6}}$

(2)　$X<Y$ となるのは，1から6までの数から異なる2つを選び，小さい順に X，Y とした場合で，その場合の数は ${}_6C_2=15$（通り）

よって求める確率は　$\dfrac{15}{6^2}=\mathbf{\dfrac{5}{12}}$

(3)　$X=Y=Z$ となるのは

$(X,\ Y,\ Z)=(1,\ 1,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2),\ (3,\ 3,\ 3),\ (4,\ 4,\ 4),\ (5,\ 5,\ 5),\ (6,\ 6,\ 6)$ の6通り

よって求める確率は　$\dfrac{6}{6^3}=\mathbf{\dfrac{1}{36}}$

(4)　$X<Y<Z$ となるのは，1から6までの数から異なる3つを選び，小さい順に X，Y，Z とした場合で，その場合の数は ${}_6C_3=20$（通り）

よって求める確率は　$\dfrac{20}{6^3}=\mathbf{\dfrac{5}{54}}$

2　[1]　さいころを3回投げるとき，次の問いに答えよ．

(1)　すべて異なる目が出る確率を求めよ．

(2)　1の目がちょうど2回出る確率を求めよ．

(1)　3回の出目がすべて異なる確率は　$\dfrac{{}_6C_3\times3!}{6^3}=\dfrac{{}_6P_3}{6^3}=\mathbf{\dfrac{5}{9}}$

(2)　1回の試行で1の目が出る確率は　$\dfrac{1}{6}$，1以外の目が出る確率は　$\dfrac{5}{6}$

よって1の目がちょうど2回出る確率は　${}_3C_2\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^1=\mathbf{\dfrac{5}{72}}$

$\boxed{2}$ ［2］　原点を出発点として数直線上を動く点Ｐがある．さいころを１回投げて，５以上の目が出たときは点Ｐを正の向きに１だけ進め，４以下の目が出たときは負の向きに２だけ進める．９回投げるとき，点Ｐが３回目と９回目に原点の位置にくる確率を求めよ．

点Ｐが正の向きに動くことを →，負の向きに動くことを ← と表す．

→ が起こる確率は　$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$　　← が起こる確率は　$\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

３回の試行で点Ｐが原点にあるのは，→ が２回，← が１回起こるときで，

その確率は　${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^1=\dfrac{2}{9}$

さらに９回目に点Ｐが原点にあるのは，３回目の試行のあとの６回で → が４回，← が２回起こるときで，その確率は　${}_6\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{20}{243}$

よって求める確率は　$\dfrac{2}{9}\times\dfrac{20}{243}=\boldsymbol{\dfrac{40}{2187}}$

$\boxed{3}$ ［1］　１枚の硬貨を繰り返し投げる．表と裏がともに２回以上出るまで投げ続ける試行をするとき，ちょうど n 回投げたときに試行が終わる確率を求めよ．ただし，n は４以上の自然数である．

硬貨を投げる１回の試行において，表，裏が出る確率はともに $\dfrac{1}{2}$ である．

ちょうど n 回（題意より $n\geqq4$）で試行が終わるのは次のとき．

（ⅰ）$n-1$ 回目までに表が１回のみ出て，n 回目に表が出る

（ⅱ）$n-1$ 回目までに裏が１回のみ出て，n 回目に裏が出る

（ⅰ）が起こる確率は　${}_{n-1}\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{n-1}{2^n}$　　（ⅱ）が起こる確率は（ⅰ）と同じ

よって求める確率は　$\dfrac{n-1}{2^n}\times2=\boldsymbol{\dfrac{n-1}{2^{n-1}}}$　（$n=4$ のときも成立）

3 [2]　ボタンを押すとX，Y，Zいずれかの文字が画面に表示される機械がある．その機械では，X，Yが表示される確率は等しく，その確率はZが表示される確率の2倍である．ボタンを5回続けて押すとき，X，Y，Zの文字が少なくとも1回表示される確率を求めよ．

Zが表示される確率をpとすると，条件より　$2p+2p+p=1$　よって　$p=\dfrac{1}{5}$

よって，X，Yが表示される確率は　$2p=\dfrac{2}{5}$，Zが表示される確率は　$p=\dfrac{1}{5}$である．

ボタンを5回押すとき，X，Y，Zの文字が少なくとも1回表示されるのは次のとき．

(i)　Xが3回，Yが1回，Zが1回のとき　$\dfrac{5!}{3!}(2p)^3\cdot 2p\cdot p=320p^5$

(ii)　Yが3回，Zが1回，Xが1回のとき　(i)同様　$320p^5$

(iii)　Zが3回，Xが1回，Yが1回のとき　$\dfrac{5!}{3!}p^3\cdot 2p\cdot 2p=80p^5$

(iv)　Xが2回，Yが2回，Zが1回のとき　$\dfrac{5!}{2!2!}(2p)^2(2p)^2p=480p^5$

(v)　Yが2回，Zが2回，Xが1回のとき　$\dfrac{5!}{2!2!}(2p)^2\cdot p^2\cdot 2p=240p^5$

(vi)　Zが2回，Xが2回，Yが1回のとき　(v)同様　$240p^5$

以上より求める確率は　$(320\times 2+80+480+240\times 2)p^5=1680p^5=1680\left(\dfrac{1}{5}\right)^5=\boldsymbol{\dfrac{336}{625}}$

(別解)

ボタンを5回押すとき

Xだけ表示される ……$\left(\dfrac{2}{5}\right)^5$

Yだけ表示される ……$\left(\dfrac{2}{5}\right)^5$

Zだけ表示される ……$\left(\dfrac{1}{5}\right)^5$

XとYだけ表示される ……$\left(\dfrac{4}{5}\right)^5-2\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^5$

YとZだけ表示される ……$\left(\dfrac{3}{5}\right)^5-\left(\dfrac{2}{5}\right)^5-\left(\dfrac{1}{5}\right)^5$

ZとXだけ表示される ……$\left(\dfrac{3}{5}\right)^5-\left(\dfrac{1}{5}\right)^5-\left(\dfrac{2}{5}\right)^5$

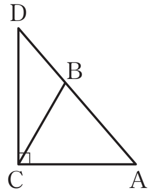
なので，上の和を1から引いて

$$1-\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^5+\left(\frac{2}{5}\right)^5+\left(\frac{1}{5}\right)^5+\left(\frac{4}{5}\right)^5+\left(\frac{3}{5}\right)^5+\left(\frac{3}{5}\right)^5-2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^5-\left(\frac{2}{5}\right)^5-\left(\frac{1}{5}\right)^5-\left(\frac{1}{5}\right)^5-\left(\frac{2}{5}\right)^5\right\}$$

$$=\frac{336}{625}$$

第９講　三角比・平面図形

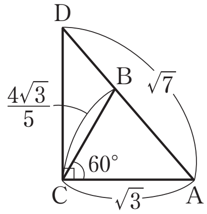
$\boxed{1}$ ［1］　右図において　$\mathrm{AD}=\sqrt{7}$, $\mathrm{AC}=\sqrt{3}$, $\mathrm{BC}=\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$, $\angle\mathrm{BCA}=60°$, $\angle\mathrm{DCA}=90°$ とする．このとき $\sin\angle\mathrm{CAB}$ の値および AB の長さを求めよ．



三角形 ADC で三平方の定理より

$$\mathrm{CD}^2=(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2=4 \qquad \mathrm{CD}=2$$

よって　$\sin\angle\mathrm{CAB}=\sin\angle\mathrm{CAD}=\dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AD}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{7}}}$



△ABC で正弦定理より

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{BCA}}=\frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{CAB}} \qquad \text{よって}\quad \mathrm{AB}=\frac{4\sqrt{3}}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{7}}{5}}$$

$\boxed{1}$ ［2］　x を正の実数とする．三角形 ABC において，$\mathrm{AB}=x$，$\mathrm{BC}=x+1$，$\mathrm{CA}=x+2$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　x のとり得る値の範囲を求めよ．

(2)　三角形 ABC が鈍角三角形となる x の値の範囲を求めよ．

(1)　3 辺のうち，CA が最大辺

よって　$\mathrm{CA}<\mathrm{AB}+\mathrm{BC}$　より　$x+2<x+(x+1)$　　ゆえに　$\boldsymbol{x>1}$

(2)　最大辺 CA の対角 $\angle\mathrm{B}$ が最大角である．

よって △ABC が鈍角三角形になるのは　$\mathrm{CA}^2>\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2$ のとき

$(x+2)^2>x^2+(x+1)^2$　　$x^2-2x-3<0$　　よって　$-1<x<3$

(1)を考慮して　　$\boldsymbol{1<x<3}$

（別解）　余弦定理より　$\cos B=\dfrac{x^2+(x+1)^2-(x+2)^2}{2\cdot x\cdot(x+1)}=\dfrac{(x-3)(x+1)}{2x(x+1)}=\dfrac{x-3}{2x}$

$-1<\cos B<0$ より　$-1<\dfrac{x-3}{2x}<0$　　$x>0$ より　$-2x<x-3<0$

よって　$1<x<3$

$\boxed{2}$ 円に内接する四角形ABCDにおいて，$AB=7\sqrt{2}$，$BC=8$，$CD=\sqrt{2}$，$\angle ABC=45^\circ$ とする．

(1) 対角線ACの長さを求めよ．

(2) 辺ADの長さを求めよ．

(3) 四角形ABCDの面積を求めよ．

(4) 対角線BDの長さを求めよ．

(1) △ABCで余弦定理より

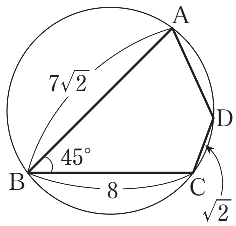
$AC^2=(7\sqrt{2})^2+8^2-2\cdot 7\sqrt{2}\cdot 8\cdot\cos 45^\circ=98+64-112=50$　　よって　$\mathbf{AC=5\sqrt{2}}$

(2) $\angle ADC=180^\circ-\angle ABC=135^\circ$

$AD=x$　(>0)　とおくと，△ADCで余弦定理より

$(5\sqrt{2})^2=x^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot x\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 135^\circ$

$x^2+2x-48=0$　$(x+8)(x-6)=0$　よって　$x=\mathbf{AD=6}$



(3) 四角形ABCD$=$△ABC$+$△ADC$=\dfrac{1}{2}\cdot 7\sqrt{2}\cdot 8\cdot\sin 45^\circ+\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot\sqrt{2}\cdot\sin 135^\circ$

$=28+3=\mathbf{31}$

(4) $\angle BAD=\theta$ とおくと，$\angle BCD=180^\circ-\theta$

△ABDで余弦定理より

$BD^2=98+36-2\cdot 7\sqrt{2}\cdot 6\cdot\cos\theta=134-84\sqrt{2}\cos\theta$　……①

△CBDで余弦定理より

$BD^2=64+2-2\cdot 8\cdot\sqrt{2}\cdot\cos(180^\circ-\theta)=66+16\sqrt{2}\cos\theta$　……②

①，②より　$134-84\sqrt{2}\cos\theta=66+16\sqrt{2}\cos\theta$　　$\cos\theta=\dfrac{17}{25\sqrt{2}}$

このとき②より　$BD^2=66+16\sqrt{2}\cdot\dfrac{17}{25\sqrt{2}}=\dfrac{1922}{25}$　　よって　$\mathbf{BD=\dfrac{31\sqrt{2}}{5}}$

(別解)　トレミーの定理より　$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$

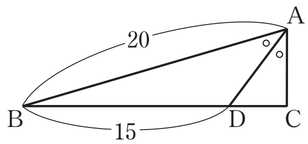
つまり　$7\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+8\cdot 6=5\sqrt{2}\,BD$　　よって　$BD=\dfrac{62}{5\sqrt{2}}=\dfrac{31\sqrt{2}}{5}$

$\boxed{3}$　$\angle$ACB が直角の $\triangle$ABC において，$\angle$BAC の二等分線と辺 BC との交点を D とする．また，AB＝20，BD＝15 とする．

(1)　CD：AC を求めよ．

(2)　線分 AD の長さを求めよ．

(3)　$\triangle$ABD の内接円の半径 r と外接円の半径 R を求めよ．



(1)　角の二等分線の性質より

BD：CD＝AB：AC

つまり　15：CD＝20：AC　より　$\dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{15}{20}=\dfrac{3}{4}$

したがって　**CD：AC＝3：4**

(2)　(1)より CD＝$3x$，AC＝$4x$ とおくと，

$\triangle$ABC で三平方の定理より　$(15+3x)^2+(4x)^2=20^2$

$5x^2+18x-35=0$　　$(x+5)(5x-7)=0$　　$x=-5,\ \dfrac{7}{5}$　　$x>0$ より　$x=\dfrac{7}{5}$

また，$\triangle$ADC で三平方の定理より　$\mathrm{AD}^2=(3x)^2+(4x)^2=25x^2$

したがって　**AD＝$5x$＝7**

(3)　$\triangle$ABD の面積を S とすると，$S=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{BD}\cdot\mathrm{AC}=\dfrac{1}{2}\cdot15\cdot\dfrac{28}{5}=42$

また，$S=\dfrac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BD}+\mathrm{AD})=\dfrac{1}{2}r(20+15+7)=21r$

よって　$21r=42$ より　$\boldsymbol{r=2}$

$\angle\mathrm{ABD}=\theta$ とおくと，$\triangle$ABC において　$\sin\theta=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{\frac{28}{5}}{20}=\dfrac{7}{25}$

$\triangle$ABD で正弦定理より　$2R=\dfrac{\mathrm{AD}}{\sin\theta}=\dfrac{7}{\frac{7}{25}}=25$　　よって　$\boldsymbol{R=\dfrac{25}{2}}$

第10講　命題と証明

$\boxed{1}$ [1]　実数 a に対して，集合 A，B，C および全体集合 U が次のように定義されている．

$A=\{2,\ -a+5,\ a^2-2a+1,\ a^2+a-6\}$，$B=\{4,\ a^2-6a+8,\ a^2-6a+9\}$

$C=\{a^2-a-2,\ a^3-8a^2+19a-12\}$，　$U=A\cup B\cup C$

いま，$A\cap B\cap C=\{0\}$ のとき，以下のものを求めよ．

(1)　a の値　　(2)　集合 $A\cap B$ の要素　　(3)　集合 $(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cup C)$ の要素

(1)　$A\cap B\cap C=\{0\}$ より，集合 B の要素の1つに0が存在する．

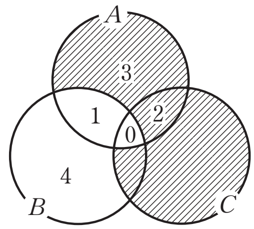
$a^2-6a+8=0$ のとき　$a=2,\ 4$

$a=2$ のとき　$A=\{2,\ 3,\ 1,\ 0\}$，$C=\{0,\ 2\}$ より適する

$a=4$ のとき　$A=\{2,\ 1,\ 9,\ 14\}$ より不適

$a^2-6a+9=0$ のとき　$a=3$　　このとき　$A=\{2,\ 2,\ 4,\ 6\}$ より不適

以上より　$\boldsymbol{a=2}$



(2)　(1)より　$A=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$，$B=\{0,\ 1,\ 4\}$，$C=\{0,\ 2\}$

よって　$\boldsymbol{A\cap B=\{0,\ 1\}}$

(3)　右図より

$\boldsymbol{(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cup C)}=(\overline{A\cap B})\cap(A\cup C)=\boldsymbol{\{2,\ 3\}}$

$\boxed{1}$ [2]　α が無理数，a，b が有理数であるとき，$a+b\alpha=0$ ならば $a=b=0$ であることを証明せよ．

$a+b\alpha=0$　より　$b\alpha=-a$

$b=0$ のとき　$0=-a$　つまり　$a=0$

$b\neq0$ のとき　$\alpha=-\dfrac{a}{b}$

a，b は有理数より $-\dfrac{a}{b}$ も有理数．

よって，左辺は無理数，右辺は有理数より矛盾．

以上より　$a+b\alpha=0$ ならば $a=b=0$

2 ［1］ 次の各命題について，真であれば証明し，偽であれば反例を1つあげよ．
(1) 実数 a について，$\sqrt{a^2}$ と a は等しい
(2) 実数 x について，$|2x-1|=x$ ならば $x=1$ である．

(1) **偽（反例 $\boldsymbol{a=-1}$）**
(2) $|2x-1|=x$ について

$x \geqq \frac{1}{2}$ のとき $2x-1=x$ より $x=1$ 　これは $x \geqq \frac{1}{2}$ を満たす

$x < \frac{1}{2}$ のとき $-2x+1=x$ より $x=\frac{1}{3}$ 　これは $x<\frac{1}{2}$ を満たす

よって $|2x-1|=x \Longleftrightarrow x=\frac{1}{3},\ 1$ 　したがって命題は**偽** $\left(\textbf{反例}\ \boldsymbol{x=\frac{1}{3}}\right)$

2 ［2］ 実数 x，y に対し，次の $\boxed{}$ に当てはまる最も適切なものを
①必要十分条件　②必要条件　③十分条件　④必要条件でも十分条件でもない
から1つ選べ．
「$x=1$ でないかまたは $y=1$」は $(x-1)(y-1)=0$ であるための $\boxed{}$

「$x=1$ でないかまたは $y=1$」$\Longrightarrow (x-1)(y-1)=0$ 　は偽（反例　$x=2$，$y=2$）
$(x-1)(y-1)=0 \Longrightarrow$「$x=1$ でないかまたは $y=1$」は偽（反例　$x=1$，$y=2$）
よって 「$x=1$ でないかまたは $y=1$」は $(x-1)(y-1)=0$ であるための　必要条件でも十分条件でもない　(④)

3 実数 x，y に関する以下の命題で正しいものは説明し，誤っているものは反例をあげよ．
(1) x と y が共に無理数であることは，$x+y$ が無理数であることの十分条件である．
(2) x と y のいずれかが無理数であることは，$x+y$ が無理数であることの必要条件である．
(3) x が有理数で y が無理数であることは，$x+y$ が無理数であることの十分条件である．

(1) 「x と y が共に無理数である $\Rightarrow$ $x+y$ が無理数である」は偽（反例 $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$）
よって, x と y が共に無理数であることは, $x+y$ が無理数であることの十分条件ではなく，命題は誤り．
(2) 「$x+y$ が無理数である $\Rightarrow$ x と y のいずれかが無理数である」の対偶は
「x と y がともに有理数 $\Rightarrow$ $x+y$ は有理数」 これは明らかに真．
よって，x と y のいずれかが無理数であることは，$x+y$ が無理数であることの必要条件であり，命題は正しい．

(3)「x が有理数で y が無理数である $\Rightarrow$ $x+y$ が無理数」について

$x+y=k$（k は有理数）とすると，　$y=k-x$

x が有理数，y が無理数のとき，

左辺は無理数であり，右辺は有理数．よって仮定に矛盾する．

したがって，x が有理数で y が無理数である $\Longrightarrow$ $x+y$ が無理数　は真，

つまり　x が有理数で y が無理数であることは，$x+y$ が無理数であることの十分条件であり，命題は正しい．

第11講　式と証明・高次方程式(1)

1　すべての実数 x に対し，$x^3+2x^2+3x+4=a(x-10)^3+b(x-10)^2+c(x-10)+d$ となるような定数 a，b，c，d を求めよ．

$x^3+2x^2+3x+4=a(x-10)^3+b(x-10)^2+c(x-10)+d$　……①

(①の右辺) $=a(x^3-30x^2+300x-1000)+b(x^2-20x+100)+c(x-10)+d$

$=ax^3+(-30a+b)x^2+(300a-20b+c)x-1000a+100b-10c+d$

①の左辺と係数を比較して

$a=1$，$-30a+b=2$，$300a-20b+c=3$，$-1000a+100b-10c+d=4$

よって　$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b=32}$，$\boldsymbol{c=343}$，$\boldsymbol{d=1234}$

(別解)　①で $x=10$ を代入すると　$1234=d$

よって，①は　$x^3+2x^2+3x+4=a(x-10)^3+b(x-10)^2+c(x-10)+1234$

$\iff x^3+2x^2+3x-1230=a(x-10)^3+b(x-10)^2+c(x-10)$　……①′

$x=10$ のとき，①′の右辺の値は 0 より，左辺も 0 となる．

よって，$x^3+2x^2+3x-1230$ は $x-10$ を因数にもつ．

$x^3+2x^2+3x-1230=(x-10)(x^2+12x+123)$ より

したがって，①′ $\iff (x-10)(x^2+12x+123)=a(x-10)^3+b(x-10)^2+c(x-10)$

両辺を $x-10$ で割って　$x^2+12x+123=a(x-10)^2+b(x-10)+c$　……②

②で $x=10$ を代入すると　$343=c$

よって，②は　$x^2+12x+123=a(x-10)^2+b(x-10)+343$

$\iff x^2+12x-220=a(x-10)^2+b(x-10)$

$\iff (x-10)(x+22)=a(x-10)^2+b(x-10)$

両辺を $x-10$ で割って　$x+22=a(x-10)+b$　　つまり　$x+22=ax-10a+b$

両辺の係数を比較して　$a=1$，$22=-10a+b$

したがって，$a=1$，$b=32$，$c=343$，$d=1234$

2　[1]　(1)　正の実数 a，b に対して，$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 4$ が成り立つことを証明せよ． (2)　正の実数 a，b，c に対して，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqq\dfrac{9}{a+b+c}$ が成り立つことを証明せよ．

(1)　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2$

$a>0$，$b>0$ より，相加平均と相乗平均の関係から

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\geqq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b}{a}}+2=4$　　等号成立は　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}$　つまり　$a=b$ のとき．

したがって，$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 4$

(2)　$a>0$，$b>0$，$c>0$ より

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqq\frac{9}{a+b+c} \iff (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqq 9 \quad \cdots\cdots①$$

これを証明する

$$(①\text{の左辺})=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1$$

$$=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+3$$

$a>0$，$b>0$，$c>0$ より，相加平均と相乗平均の関係から

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqq 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}=2 \qquad \text{等号成立は}\quad a=b\text{ のとき}$$

$$\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geqq 2\sqrt{\frac{c}{b}\times\frac{b}{c}}=2 \qquad \text{等号成立は}\quad b=c\text{ のとき}$$

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geqq 2\sqrt{\frac{a}{c}\times\frac{c}{a}}=2 \qquad \text{等号成立は}\quad c=a\text{ のとき}$$

よって　$\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+3\geqq 2+2+2+3=9$

等号成立は　$a=b=c$ のとき

したがって，①すなわち　$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqq\frac{9}{a+b+c}$　が成立

---

2 [2]　$x>0$，$y>0$ のとき，不等式 $\left(9x+\frac{1}{y}\right)\left(4y+\frac{1}{x}\right)\geqq k$ が常に成り立つような k の値の最大値を求めよ．

$x>0$，$y>0$ より，相加平均と相乗平均の関係から

$$\left(9x+\frac{1}{y}\right)\left(4y+\frac{1}{x}\right)=36xy+\frac{1}{xy}+13\geqq 2\sqrt{36xy\cdot\frac{1}{xy}}+13=2\cdot 6+13=25$$

等号成立は　$36xy=\frac{1}{xy}$　　つまり　$xy=\frac{1}{6}$

よって　$\left(9x+\frac{1}{y}\right)\left(4y+\frac{1}{x}\right)\geqq 25$

したがって，$x>0$，$y>0$ のとき　$\left(9x+\frac{1}{y}\right)\left(4y+\frac{1}{x}\right)\geqq k$　が常に成り立つのは

$25\geqq k$ のとき．

ゆえに求める k の最大値は　$\boldsymbol{k=25}$　$\left(xy=\frac{1}{6}\text{ のとき}\right)$

3 ［1］　$z^2=-2i$ のとき，z を求めよ．ただし，$i^2=-1$ である．

$z=a+bi$（a，b は実数）とおくと，

$z^2=(a+bi)^2=a^2+2abi+b^2i^2=a^2-b^2+2abi$

よって　$z^2=-2i$ より　$a^2-b^2=0$　……①，　$2ab=-2$　……②

②より　$b=-\dfrac{1}{a}$　これを①に代入して　$a^2-\left(-\dfrac{1}{a}\right)^2=0$

$a^4-1=0$　　$(a^2+1)(a^2-1)=0$　　a は実数より　$a=\pm 1$

よって　$(a,\ b)=(1,\ -1),\ (-1,\ 1)$

したがって　$\boldsymbol{z=1-i,\ -1+i}$

3 ［2］　2 次方程式 $x^2-x+1=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha^{10}+\beta^{10}$，$\alpha^6-2\alpha^3\beta^3+\beta^6$ の値を求めよ．

α は $x^2-x+1=0$ の解より　$\alpha^2-\alpha+1=0$

$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$　　$\alpha^3+1=0$　　よって　$\alpha^3=-1$

同様に　$\beta^2-\beta+1=0$，$\beta^3=-1$

また，解と係数の関係より　$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=1$

よって　$\alpha^{10}+\beta^{10}=(\alpha^3)^3\cdot\alpha+(\beta^3)^3\cdot\beta=-\alpha+(-\beta)=-(\alpha+\beta)=\boldsymbol{-1}$

$\alpha^6-2\alpha^3\beta^3+\beta^6=(\alpha^3)^2-2\alpha^3\beta^3+(\beta^3)^2=1-2\cdot 1^3+1=\boldsymbol{0}$

第12講　高次方程式(2)

|1| [1]　x が $0<x<1$ と $x^2+\dfrac{1}{x^2}=3$ を満たすとき，x^3 の値を求めよ．

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=3$　より　$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=3$　　$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=5$　$x>0$ より　$x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$

よって $x^2-\sqrt{5}\,x+1=0$　　$x=\dfrac{\sqrt{5}\pm\sqrt{5-4}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}\pm1}{2}$　　$0<x<1$ より　$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

また，$x^2=\sqrt{5}\,x-1$

したがって　$x^3=x^2\cdot x=(\sqrt{5}\,x-1)x=\sqrt{5}\,x^2-x=\sqrt{5}(\sqrt{5}\,x-1)-x=4x-\sqrt{5}$

$$=4\times\frac{\sqrt{5}-1}{2}-\sqrt{5}=\boldsymbol{\sqrt{5}-2}$$

|1| [2]　$x=2+\sqrt{3}\,i$ のとき，x^3-4x^2+8x+4 の値を求めよ．

$x=2+\sqrt{3}\,i$ のとき　$x-2=\sqrt{3}\,i$　　$(x-2)^2=(\sqrt{3}\,i)^2$

　$x^2-4x+4=-3$　　よって　$x^2-4x+7=0$

$x^3-4x^2+8x+4=(x^2-4x+7)x+x+4$

$x=2+\sqrt{3}\,i$ のとき　$x^2-4x+7=0$ より

　$x^3-4x^2+8x+4=x+4=(2+\sqrt{3}\,i)+4=\boldsymbol{6+\sqrt{3}\,i}$

$\boxed{2}$ ［1］ 3 次方程式　$x^3-ax^2+bx+a-6=0$　……①　について，次の問いに答えよ．

(1) 方程式①が $x=1$ を 2 重解にもつとき，定数 a，b の値，および残りの解を求めよ．

(2) 方程式①の実数解が $x=1$ のみで，他の 2 つの解が虚数解となるような a の値の範囲を求めよ．

(1) ①を変形すると

$$(x-1)\{x^2+(1-a)x+1-a+b\}+b-5=0$$

この方程式が $x=1$ を解にもつので，$b-5=0$　よって　$b=5$

このとき　$(x-1)\{x^2+(1-a)x+6-a\}=0$

①が $x=1$ を 2 重解にもつので，$x^2+(1-a)x+6-a=0$　……②　が $x=1$ を解にもつ．

よって　$1+(1-a)\cdot 1+6-a=0$　　$a=4$

したがって　$\boldsymbol{a=4,\ b=5}$

このとき②は　$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)=0$　$x=1,\ 2$　より，残りの解は　$\boldsymbol{x=2}$

(2) ①が $x=1$ を解にもつとき，(1)より　$b=5$

このとき，②が異なる 2 つの虚数解をもてばよい．

よって②の判別式を D とすると　$D=(a-1)^2+4(a-6)=a^2+2a-23$

$D<0$ より　$a^2+2a-23<0$　　よって　$\boldsymbol{-1-2\sqrt{6}<a<-1+2\sqrt{6}}$

$\boxed{2}$ ［2］ 4 次方程式　$x^4-4x^3+7x^2-8x+4=0$　……①　について，次の問いに答えよ．

(1) $t=x+\dfrac{2}{x}$ とおき，①を t の式で表せ．

(2) 方程式①を複素数の範囲で解け．

(1) $x^4-4x^3+7x^2-8x+4=0$ は $x=0$ を解にもたない．

よって両辺を x^2 で割って

$$x^2-4x+7-8\cdot\frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{2}{x}\right)+7=0 \qquad \left(x+\frac{2}{x}\right)^2-4-4\left(x+\frac{2}{x}\right)+7=0$$

$$\left(x+\frac{2}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{2}{x}\right)+3=0$$　よって　$t=x+\dfrac{2}{x}$ とおくと　$\boldsymbol{t^2-4t+3=0}$

(2) (1)より $t=1$，$t=3$

$t=1$ のとき　$x+\dfrac{2}{x}=1$　　$x^2-x+2=0$　　よって　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{7}\,i}{2}$

$t=3$ のとき　$x+\dfrac{2}{x}=3$　　$x^2-3x+2=0$　　よって　$x=1,\ 2$

したがって①の解は　$\boldsymbol{x=1,\ 2,\ \dfrac{1\pm\sqrt{7}\,i}{2}}$

3　3次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の3つの解を α, β, γ とする.

(1)　$\alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=-c$ が成り立つことを示せ.

(2)　$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3$, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=7$ のとき, $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$ の値を求めよ.

(1)　3次方程式　$x^3+ax^2+bx+c=0$ の3つの解を α, β, γ とすると

$$x^3+ax^2+bx+c=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$
$$=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$$

係数を比較して　$\alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=-c$　　よって示された.

(2)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3$　より　$(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=3$

$\alpha+\beta+\gamma=1$ より　$1-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=3$　　よって　$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$ より

$7-3\alpha\beta\gamma=1\cdot\{3-(-1)\}$　　よって　$\alpha\beta\gamma=1$

よって　$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$, $\alpha\beta\gamma=1$ より, α, β, γ は3次方程式

$t^3-t^2-t-1=0$ の3解

したがって　$\alpha^3-\alpha^2-\alpha-1=0$　より　$\alpha^3=\alpha^2+\alpha+1$　つまり　$\alpha^4=\alpha^3+\alpha^2+\alpha$

同様に　$\beta^4=\beta^3+\beta^2+\beta$, $\gamma^4=\gamma^3+\gamma^2+\gamma$

したがって　$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=7+3+1=\boldsymbol{11}$$

第13講　図形と方程式(1)

1 ［1］　座標平面上の直線 $x+2y=6$ 上にあって，点 $(2,\ -3)$ との距離が最小になる点の座標を求めよ．

直線 $x+2y=6$ 上の点を $(-2t+6,\ t)$ とおくと，この点と $(2,\ -3)$ の距離 l について

$l^2=\{(-2t+6)-2\}^2+(t+3)^2=(-2t+4)^2+(t+3)^2$

$\quad =5t^2-10t+25=5(t-1)^2+20$

よって $t=1$ のとき l^2 は最小．$l>0$ より，このとき l も最小となる．

したがって求める点の座標は　$\boldsymbol{(4,\ 1)}$

(別解)　求める点の座標は，点 $(2,\ -3)$ から直線 $x+2y=6$ に下ろした垂線の足の座標である．

直線 $x+2y=6$（傾き $-\dfrac{1}{2}$）と垂直で点 $(2,\ -3)$ を通る直線は

$\quad y=2(x-2)-3=2x-7$

これと直線 $x+2y=6$ の交点の座標は　$(4,\ 1)$．これが求める点の座標である．

1 ［2］　2直線 $4x+3y-14=0$，$x-3y-11=0$ の交点を通り，直線 $x-y+4=0$ と直交する直線を求めよ．

2直線 $4x+3y-14=0$，$x-3y-11=0$ の交点の座標は $(5,\ -2)$

この点を通り，$x-y+4=0$（傾き1）と垂直な直線は

$\quad y=-1\cdot(x-5)-2=-x+3$　　よって求める直線は　$\boldsymbol{y=-x+3}$

(別解)　2直線 $4x+3y-14=0$，$x-3y-11=0$ の交点を通る直線は

$$x-3y-11+k(4x+3y-14)=0$$
$$\iff (4k+1)x+(3k-3)y-14k-11=0 \quad \cdots\cdots①$$

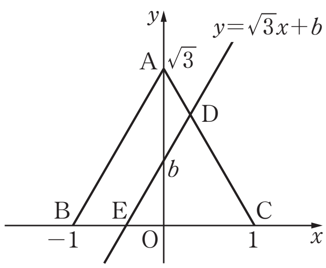
と表せる．

①と直線 $x-y+4=0$ が直交するので，$1\cdot(4k+1)-1\cdot(3k-3)=0$　　$k=-4$

このとき①より　$-15x-15y+45=0$　　よって求める直線は　$y=-x+3$

$\boxed{2}$ ［1］　xy 平面上に3点 $A(0,\ \sqrt{3})$, $B(-1,\ 0)$, $C(1,\ 0)$ を頂点とする $\triangle ABC$ がある．$\triangle ABC$ の面積が直線 $y=\sqrt{3}x+b$ で二等分されるように，定数 b の値を定めよ．

直線 AB の傾きは $\sqrt{3}$ より，直線 l：$y=\sqrt{3}x+b$ と直線 AB は平行である．
直線 l と線分 AC，BC との交点をそれぞれ D，E とすると
$\triangle DEC:\triangle ABC=1:2$ であればよい．
このとき，$\triangle DEC \backsim \triangle ABC$ より $BC:EC=\sqrt{2}:1$
よって　$2:EC=\sqrt{2}:1$　より　$EC=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$
したがって，$b=EO\times\sqrt{3}=(\sqrt{2}-1)\times\sqrt{3}=\boldsymbol{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$



$\boxed{2}$ ［2］　直線 l：$px-(p+1)y+2p-1=0$（p は実数）が与えられている．
(1)　直線 l は，p の値に関わらずある定点を通る．その定点の座標を求めよ．
(2)　直線 l が $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で x 軸と交わるとき，p のとりうる範囲を求めよ．

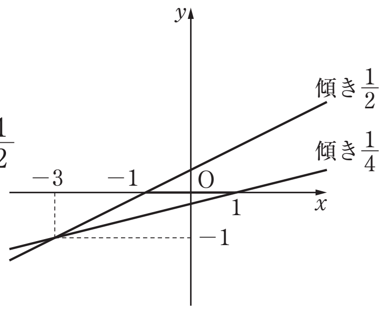
(1)　直線 l：$px-(p+1)y+2p-1=0$　を変形すると

$$(x-y+2)p+(-y-1)=0$$

これがすべての実数 p について成立するのは　$x-y+2=0$，$-y-1=0$
つまり　$x=-3$，$y=-1$ のとき．
したがって，直線 l は p の値によらず定点 $\boldsymbol{(-3,\ -1)}$ を通る．

(2)　(1)より直線 l は定点 $(-3,\ -1)$ を通る．
直線 l が $(-1,\ 0)$ を通るとき，傾きは $\dfrac{1}{2}$　　$(1,\ 0)$ を通るとき，傾きは $\dfrac{1}{4}$
よって，$\dfrac{1}{4}\leqq$(直線 l の傾き)$\leqq\dfrac{1}{2}$ であればよい．
$p+1=0$ のとき，直線 l は x 軸に垂直な直線となり不適．
よって　$p+1\neq 0$
したがって直線 l の傾きは　$\dfrac{p}{p+1}$ より　$\dfrac{1}{4}\leqq\dfrac{p}{p+1}\leqq\dfrac{1}{2}$

$p>-1$ のとき　$p+1\leqq 4p\leqq 2(p+1)$
　　よって　$\dfrac{1}{3}\leqq p\leqq 1$（$p>-1$ を満たす）
$p<-1$ のとき　$p+1\geqq 4p\geqq 2(p+1)$　これを満たす p はない．



以上より，求める p の範囲は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\leqq p\leqq 1}$

$\boxed{3}$ ［1］　点Pが円 $x^2-2x+y^2-2y-18=0$ の上を動くとき，点 $\mathrm{A}(4,\ 1)$ との距離 AP の最小値と最大値を求めよ．

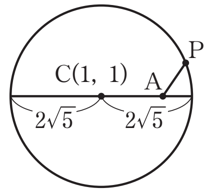
$x^2-2x+y^2-2y-18=0$ より　$(x-1)^2+(y-1)^2=20$

よってこの円の中心は $\mathrm{C}(1,\ 1)$，半径は $r=2\sqrt{5}$

$\mathrm{AC}=3<r$ より，点Aは円の内部にある．

したがって，円周上の点Pと点Aの距離 AP は

最小値　$r-\mathrm{AC}=\mathbf{2\sqrt{5}-3}$　　**最大値**　$r+\mathrm{AC}=\mathbf{2\sqrt{5}+3}$　をとる．



$\boxed{3}$ ［2］　2点 $\mathrm{A}(4,\ -2)$，$\mathrm{B}(1,\ -3)$ を通り，中心が直線 $y=3x-1$ 上にある円の方程式を求めよ．

求める円の中心は，線分 AB の垂直二等分線上にある．

直線 AB の傾きは $\dfrac{1}{3}$，線分 AB の中点は $\left(\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{5}{2}\right)$ より

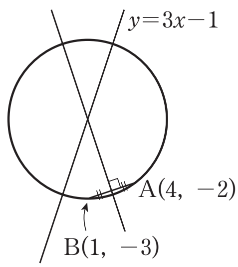
線分 AB の垂直二等分線は　$y=-3\left(x-\dfrac{5}{2}\right)-\dfrac{5}{2}=-3x+5$

これと直線 $y=3x-1$ の交点が求める円の中心である．

2式を連立することにより　$x=1$，$y=2$

よって中心の座標は $(1,\ 2)$，半径は $\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

したがって，求める円の方程式は　$\boldsymbol{(x-1)^2+(y-2)^2=25}$



第 14 講　図形と方程式(2)

1	円 $C：x^2+y^2=25$ の接線のうち，傾きが 7 になるものを求めよ．

（解法１） 求める接線を $y=7x+b \iff 7x-y+b=0$ とおくと

この直線と円の中心 (0，0) の距離が半径 5 に等しいので

$\dfrac{|b|}{\sqrt{7^2+(-1)^2}}=5$　　$|b|=25\sqrt{2}$　　$b=\pm25\sqrt{2}$

よって求める接線は　$\boldsymbol{y=7x\pm25\sqrt{2}}$

（解法２） 求める接線を $y=7x+b$ とおき，$x^2+y^2=25$ と連立して y を消去すると

$x^2+(7x+b)^2=25 \iff 50x^2+14bx+b^2-25=0$

この式で判別式 $D=0$ であればよい．

よって　$\dfrac{D}{4}=49b^2-50(b^2-25)=0$　　$b^2=2\times25^2$　　$b=\pm25\sqrt{2}$

従って求める接線は　$y=7x\pm25\sqrt{2}$

（解法３） 接点を $(s,\ t)$ とおくと，求める接線は　$sx+ty=25$　とおける．

この直線の傾きが 7 であることより　$-\dfrac{s}{t}=7$　つまり　$s=-7t$　……①

また，$(s,\ t)$ は円周上の点より　$s^2+t^2=25$　……②

①，②より　$(-7t)^2+t^2=25$　　$t^2=\dfrac{1}{2}$　　$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$s=\mp\dfrac{7}{\sqrt{2}}$（複号同順）

よって求める接線は　$\mp\dfrac{7}{\sqrt{2}}x\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}y=25$　　つまり　$y=7x\pm25\sqrt{2}$

$\boxed{2}$ [1]　平面上の3点A(0, 2), B(1, −2), C(−2, 0)に対し，$AP^2=BP^2+CP^2$を満たす点Pの軌跡を求めよ．

点Pを(x, y)とおくと，$AP^2=BP^2+CP^2$より

$$x^2+(y-2)^2=(x-1)^2+(y+2)^2+(x+2)^2+y^2$$

$$x^2+y^2+2x+8y+5=0 \qquad (x+1)^2+(y+4)^2=12$$

よって点Pの軌跡は　**中心$(-1, -4)$　半径$2\sqrt{3}$の円**

$\boxed{2}$ [2]　点Pが円$x^2+y^2=4$の周上を動くとき，点A(8, 0)と点Pを結ぶ線分APをAQ：QP＝2：3に内分する点Qの軌跡を求めよ．

$P(s, t)$とおくと，線分APを2：3に内分する点Qの座標は

$$\left(\frac{3\cdot 8+2\cdot s}{5},\ \frac{3\cdot 0+2\cdot t}{5}\right)=\left(\frac{2s+24}{5},\ \frac{2}{5}t\right)$$

よって，$Q(x, y)$とおくと，$x=\dfrac{2s+24}{5}$，$y=\dfrac{2}{5}t$

これらより，$s=\dfrac{5}{2}x-12$，$t=\dfrac{5}{2}y$

$P(s, t)$は円$x^2+y^2=4$上の点より　$\left(\dfrac{5}{2}x-12\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}y\right)^2=4$

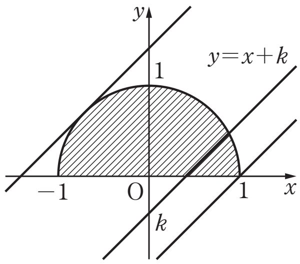
$$\left\{\frac{5}{2}\left(x-\frac{24}{5}\right)\right\}^2+\left(\frac{5}{2}y\right)^2=4 \qquad \frac{25}{4}\left(x-\frac{24}{5}\right)^2+\frac{25}{4}y^2=4 \qquad \left(x-\frac{24}{5}\right)^2+y^2=\frac{16}{25}$$

よって求める点Qの軌跡は　**中心$\left(\dfrac{24}{5}, 0\right)$　半径$\dfrac{4}{5}$の円**

3 [1]　実数 x，y が2つの不等式 $x^2+y^2\leqq 1$，$y\geqq 0$ を同時に満たすとき，$y-x$ の最小値と最大値を求めよ．

$x^2+y^2\leqq 1$，$y\geqq 0$ で表される領域 D は右図斜線部（境界含む）

$y-x=k$ とおき，l：$y=x+k$（傾き1の直線）が領域 D と共有点をもつときの y 切片 k を考える．



k が最小になるのは　l が $(1,\ 0)$ を通るときで

最小値は　$k=y-x=-1$

k が最大になるのは　l が半円と接するときで

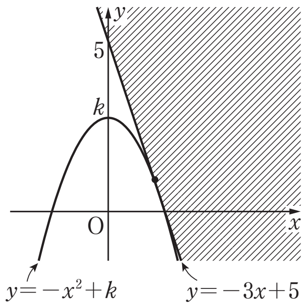
$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1 \text{ より}\quad k=\pm\sqrt{2}\quad k>0 \text{ より}\quad k=\sqrt{2}$$

よって**最小値 −1**　　**最大値 $\sqrt{2}$**

3 [2]　点 $(x,\ y)$ が領域 $3x+y\geqq 5$ を動くとき，x^2+y の最小値を求めよ．

$3x+y\geqq 5$ の表す領域 D は右図斜線部（境界含む）

$x^2+y=k$ とおき，$y=-x^2+k$（軸が $x=0$，上に凸の放物線）が領域 D と共有点をもつときの y 切片 k を考える．



$y=-x^2+k$ と $y=-3x+5$（領域の境界）を連立して

y を消去すると　$-3x+5=-x^2+k$　　　$x^2-3x+5-k=0$

この方程式が重解をもつとき，2グラフは接し，このとき k は最小となる．

判別式 $D=0$　より　$9-4(5-k)=0$　　$k=\dfrac{11}{4}$

よって求める最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{11}{4}}$

第15講　三角関数

$\boxed{1}$ [1]　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ に対して $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{4}{3}$ のとき，次の値を求めよ．

(1)　$\sin\alpha\cos\alpha$　(2)　$\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$

(3)　$\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha}$　(4)　$\sin\alpha$

(1)　$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{4}{3}$ より　$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\dfrac{16}{9}$

$1+2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{16}{9}$　よって　$\sin\alpha\cos\alpha=\boldsymbol{\dfrac{7}{18}}$

(2)　$\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)=\dfrac{4}{3}\left(1-\dfrac{7}{18}\right)=\boldsymbol{\dfrac{22}{27}}$

(3)　$\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{1}{\frac{7}{18}}=\boldsymbol{\dfrac{18}{7}}$

(4)　$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1-\dfrac{7}{9}=\dfrac{2}{9}$　よって　$\sin\alpha-\cos\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

これと $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{4}{3}$ を辺々加えて　$2\sin\alpha=\dfrac{4\pm\sqrt{2}}{3}$　よって　$\sin\alpha=\boldsymbol{\dfrac{4\pm\sqrt{2}}{6}}$

$\boxed{1}$ [2]　$8\cos^2\theta-2\sin\theta-5=0$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ を満たす θ を求めよ．

$8\cos^2\theta-2\sin\theta-5=0$

$8(1-\sin^2\theta)-2\sin\theta-5=0$

$8\sin^2\theta+2\sin\theta-3=0$

$(4\sin\theta+3)(2\sin\theta-1)=0$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $0\leqq\sin\theta\leqq1$　よって　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi}$

$\boxed{2}$ [1]　(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin 2\theta - \sqrt{2}\cos\theta = 0$ を解け.

(2)　$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，不等式 $\sin 2x + \sqrt{3}\sin x - \sqrt{3}\cos x > \dfrac{3}{2}$ を解け.

(1)　$\sin 2\theta - \sqrt{2}\cos\theta = 0$　より　$2\sin\theta\cos\theta - \sqrt{2}\cos\theta = 0$

$\cos\theta(2\sin\theta - \sqrt{2}) = 0$

$\cos\theta = 0$　または　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi}$

(2)　$\sin 2x + \sqrt{3}\sin x - \sqrt{3}\cos x > \dfrac{3}{2}$　より　$2\sin x\cos x + \sqrt{3}\sin x - \sqrt{3}\cos x - \dfrac{3}{2} > 0$

$4\sin x\cos x + 2\sqrt{3}\sin x - 2\sqrt{3}\cos x - 3 > 0$

$(2\sin x - \sqrt{3})(2\cos x + \sqrt{3}) > 0$

よって　$\sin x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ かつ $\cos x > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　または　$\sin x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ かつ $\cos x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi < x \leqq \pi}$

$\boxed{2}$ [2]　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $3\sin\theta - 1 < \cos 2\theta$ を満たす θ の値の範囲を求めよ.

$3\sin\theta - 1 < \cos 2\theta$　より　$3\sin\theta - 1 < 1 - 2\sin^2\theta$

$2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 < 0$　　$(\sin\theta + 2)(2\sin\theta - 1) < 0$

常に $\sin\theta + 2 > 0$ より　$2\sin\theta - 1 < 0$　　$\sin\theta < \dfrac{1}{2}$　　よって　$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi}$

$\boxed{3}$ ［1］ $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数 $y=\sin^2\theta-\cos\theta$ の最大値，最小値を求めよ．

$y=\sin^2\theta-\cos\theta=1-\cos^2\theta-\cos\theta$

$\cos\theta=t$ とおくと，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より $-1 \leqq t \leqq 1$

このとき　$y=-t^2-t+1=-\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$

よって　$t=-\dfrac{1}{2}$　つまり　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ より　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき　**最大値 $\dfrac{5}{4}$**

$t=1$　つまり　$\cos\theta=1$ より　$\theta=0$ のとき　**最小値 -1**　をとる．

$\boxed{3}$ ［2］ $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で，$\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta$ の最小値と，それをとる θ の値を求めよ．

$\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta$

$=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}+2\sqrt{3}\times\dfrac{\sin 2\theta}{2}-\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

$=\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta=2\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より　$0 \leqq 2\theta \leqq 2\pi$　$\dfrac{\pi}{6} \leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{13}{6}\pi$

$-1 \leqq \sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right) \leqq 1$　　$-2 \leqq 2\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right) \leqq 2$

よって，$2\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}\pi$　つまり　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{2}{3}\pi}$　**のとき　最小値 -2**

第 16 講　指数関数・対数関数

$\boxed{1}$ [1]　実数 x が $4^x+4^{-x}=7$ をみたすとき，8^x+8^{-x} の値を求めよ.

$4^x+4^{-x}=7$ より　$(2^x)^2+(2^{-x})^2=7$

$2^x=X$ とおくと $X>0$，また　$2^{-x}=\dfrac{1}{2^x}=\dfrac{1}{X}$

このとき　$X^2+\dfrac{1}{X^2}=7$　つまり　$\left(X+\dfrac{1}{X}\right)^2-2=7$　$\left(X+\dfrac{1}{X}\right)^2=9$

$X+\dfrac{1}{X}>0$ より　$X+\dfrac{1}{X}=3$

よって　$8^x+8^{-x}=(2^x)^3+(2^{-x})^3=X^3+\dfrac{1}{X^3}$

$$=\left(X+\frac{1}{X}\right)\left(X^2-1+\frac{1}{X^2}\right)=3\cdot(7-1)=\mathbf{18}$$

$\boxed{1}$ [2]　$a=\log_2 5$，$b=\log_2 9$ のとき，$\log_4 150$ を a，b を用いて表せ.

$a=\log_2 5$

$b=\log_2 9=\log_2 3^2=2\log_2 3$　より　$\dfrac{b}{2}=\log_2 3$

$$\log_4 150=\frac{\log_2 150}{\log_2 4}=\frac{\log_2(5^2\times3\times2)}{2}=\frac{2\log_2 5+\log_2 3+1}{2}$$

$$=\frac{2a+\dfrac{b}{2}+1}{2}=\boldsymbol{\frac{4a+b+2}{4}}$$

$\boxed{1}$ [3]　a は正の実数で，$b=32a^3$ とする．$x=\log_2 b$，$y=\log_2 a$ とおくとき，y を x を用いて表せ.

$x=\log_2 b$，$y=\log_2 a$ より　$2^x=b$，$2^y=a$

$b=32a^3$　より　$2^x=32\times(2^y)^3$　　$2^x=2^{3y+5}$　　よって　$x=3y+5$　より　$\boldsymbol{y=\dfrac{x-5}{3}}$

(別解)　$b=32a^3$ において $a>0$ より $b>0$

よって両辺正より，底を 2 とする対数をとると

$\log_2 b=\log_2 32a^3=5+3\log_2 a$

$x=\log_2 b$，$y=\log_2 a$ より　$x=5+3y$　　よって　$y=\dfrac{x-5}{3}$

$\boxed{2}$ [1]　方程式 $2\cdot 8^x-3\cdot 4^{x+1}+5\cdot 2^{x+1}+24=0$ を解け.

$2\cdot 8^x-3\cdot 4^{x+1}+5\cdot 2^{x+1}+24=0$　より　$2\cdot(2^x)^3-12\cdot(2^x)^2+10\cdot 2^x+24=0$

$2^x=X$ とおくと $X>0$

$2X^3-12X^2+10X+24=0$　　$X^3-6X^2+5X+12=0$

$(X+1)(X-3)(X-4)=0$　　$X>0$ より　$X=3,\ 4$

つまり　$2^x=3,\ 4$　より　$\boldsymbol{x=\log_2 3,\ 2}$

$\boxed{2}$ [2]　次の不等式を解け.

(1)　$\log_2 2x+\log_2(x-7)<2\log_2(x-3)$　　(2)　$\log_2(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(2-x)<0$

(1)　真数は正より　$x>0,\ x-7>0,\ x-3>0$　つまり　$x>7$　……①

このとき $\log_2 2x+\log_2(x-7)<2\log_2(x-3)$　より

$\log_2 2x(x-7)<\log_2(x-3)^2$

底2は1より大きいので　$2x(x-7)<(x-3)^2$　　$x^2-8x-9<0$

$(x-9)(x+1)<0$　　$-1<x<9$

①より　$\boldsymbol{7<x<9}$

(2)　真数は正より　$x-1>0,\ 2-x>0$　つまり　$1<x<2$　……①

このとき　$\log_2(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(2-x)<0$　より

$\log_2(x-1)+\dfrac{\log_2(2-x)}{\log_2\frac{1}{2}}<0$　　$\log_2(x-1)-\log_2(2-x)<0$

$\log_2(x-1)<\log_2(2-x)$

底2は1より大きいので　$x-1<2-x$　　$x<\dfrac{3}{2}$　　①より　$\boldsymbol{1<x<\dfrac{3}{2}}$

3 ［1］ 関数 $y=3^{2x+1}-5\cdot 3^{x+1}$ $(-2\leqq x\leqq 1)$ の最大値，最小値を求めよ．

$y=3^{2x+1}-5\cdot 3^{x+1}=3\cdot(3^x)^2-15\cdot 3^x$

$3^x=t$ とおくと，$-2\leqq x\leqq 1$ より　$3^{-2}\leqq t\leqq 3^1$　　つまり　$\dfrac{1}{9}\leqq t\leqq 3$

このとき　$y=3t^2-15t=3\left(t-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{75}{4}$

y のグラフは軸が $\dfrac{5}{2}$，下に凸の放物線より

$t=\dfrac{1}{9}$ のとき　最大値　$3\left(\dfrac{1}{9}\right)^2-15\cdot\dfrac{1}{9}=\boldsymbol{-\dfrac{44}{27}}$

$t=\dfrac{5}{2}$ のとき　最小値　$\boldsymbol{-\dfrac{75}{4}}$

3 ［2］ (1)　関数 $y=2(\log_{\frac{1}{2}}x)^2-4\log_{\frac{1}{2}}x$ $\left(\dfrac{1}{4}\leqq x\leqq 8\right)$ の最大値，最小値を求めよ． (2)　$x>0$，$y>0$，$2x+y=8$ のとき，$\log_2 x+\log_2 y$ の最大値を求めよ．

(1)　$\log_{\frac{1}{2}}x=t$ とおくと　$\dfrac{1}{4}\leqq x\leqq 8$ より　$-3\leqq t\leqq 2$

このとき　$y=2(\log_{\frac{1}{2}}x)^2-4\log_{\frac{1}{2}}x=2t^2-4t=2(t-1)^2-2$

よって　$t=-3$ のとき　最大値　$2\cdot(-3)^2-4\cdot(-3)=\mathbf{30}$

$t=1$ のとき　最小値　$\mathbf{-2}$

(2)　$2x+y=8$ より　$y=8-2x$　　$y>0$ より　$8-2x>0$　$x<4$

これと $x>0$ より　$0<x<4$

このとき　$\log_2 x+\log_2 y=\log_2 x+\log_2(8-2x)$

$=\log_2 x(8-2x)=\log_2(-2x^2+8x)$

$=\log_2\{-2(x-2)^2+8\}$

底2は1より大きいので，真数が最大のときにこの式の値は最大になる．

よって　$x=2$，$y=4$ のとき　最大値　$\log_2 8=\mathbf{3}$ をとる．

第 17 講　微分法

$\boxed{1}$　$f(x)=2x^3-6x+1$ とし，曲線 $y=f(x)$ を C とする．

(1)　C 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式を求めよ．

(2)　(1)で求めた接線を y 軸方向に $+1$ 平行移動した直線を l とする．l が C に接するときの a の値を求めよ．

(1)　$C:f(x)=2x^3-6x+1$　　$f'(x)=6x^2-6$

よって $(a,\ f(a))$ における曲線 C の接線の方程式は　$y=f'(a)(x-a)+f(a)$ より

$y=(6a^2-6)(x-a)+2a^3-6a+1$　　よって　$\boldsymbol{y=(6a^2-6)x-4a^3+1}$

(2)　(1)で求めた接線を y 軸方向に 1 平行移動した直線 l の方程式は

$y=(6a^2-6)x-4a^3+2$　……①

①が C と接するとき，接点の x 座標を b とするとその方程式は(1)より

$y=(6b^2-6)x-4b^3+1$　……②

①と②が一致するとき，係数を比較して

$6a^2-6=6b^2-6$　……③，　$-4a^3+2=-4b^3+1$　……④

③より　$a^2=b^2$　　$a\neq b$ より　$b=-a$

このとき④より　$-4a^3+2=4a^3+1$　　$a^3=\dfrac{1}{8}$　　a は実数より　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}}$

$\boxed{2}$ [1]　関数 $f(x)=x^3-3x^2-9x$ の極大値を M，極小値を m とする．

(1)　M，m の値を求めよ．

(2)　$m \leqq f(x) \leqq M$ が成り立つような x の値の範囲を求めよ．

(1)　$f(x)=x^3-3x^2-9x$　より　$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

よって $f(x)$ の増減は右表

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$

したがって　極大値 $\boldsymbol{M=5}$

極小値 $\boldsymbol{m=-27}$

(2)　$f(x)=M$ となる x は

$x^3-3x^2-9x=5$　より　$(x+1)^2(x-5)=0$

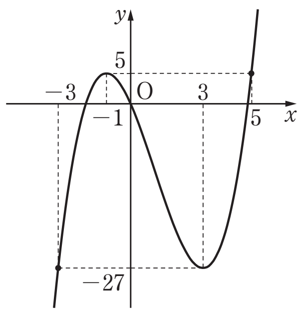
$x=-1,\ 5$

$f(x)=m$ となる x は

$x^3-3x^2-9x=-27$　より　$(x+3)(x-3)^2=0$

$x=-3,\ 3$

よって $y=f(x)$ のグラフは右図より，



$m \leqq f(x) \leqq M$ が成り立つ x の範囲は　$\boldsymbol{-3 \leqq x \leqq 5}$

$\boxed{2}$ [2]　関数 $f(x)=2x^3+9x^2-3x-7$ が $x=\alpha$ で極大値 M をとり，$x=\beta$ で極小値 m をとるとき，$\beta-\alpha$，および $M-m$ の値を求めよ．

$f(x)=2x^3+9x^2-3x-7$　より　$f'(x)=6x^2+18x-3=3(2x^2+6x-1)$

題意より $f'(x)=0$　つまり　$2x^2+6x-1=0$ の 2 解が α，β $(\alpha<\beta)$ である．

解と係数の関係より　$\alpha+\beta=-3$，$\alpha\beta=-\dfrac{1}{2}$

$$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=(-3)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=11 \quad \text{よって} \quad \beta-\alpha=\boldsymbol{\sqrt{11}}\ (>0)$$

また，$\alpha-\beta=-(\beta-\alpha)=-\sqrt{11}$

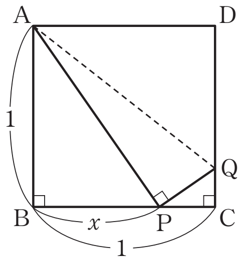
$$\begin{aligned} M-m&=f(\alpha)-f(\beta)\\ &=2(\alpha^3-\beta^3)+9(\alpha^2-\beta^2)-3(\alpha-\beta)\\ &=2\{(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)\}+9(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)-3(\alpha-\beta)\\ &=2\left\{-11\sqrt{11}-\frac{3}{2}\cdot(-\sqrt{11})\right\}+9\cdot(-3)\cdot(-\sqrt{11})-3\cdot(-\sqrt{11})=\boldsymbol{11\sqrt{11}} \end{aligned}$$

$\boxed{3}$　一辺の長さが1の正方形ABCDを考える．点Pは，点B，Cを除いた辺BC上を動くとする．点Pを通り直線APと垂直な直線と辺CDとの交点をQとする．線分BPの長さをxとするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\angle\mathrm{BAP}=\theta$とするとき，$\angle\mathrm{CPQ}$を$\theta$を用いて表せ．

(2)　$\triangle\mathrm{CPQ}$の面積Sの最大値と，そのときのxの値を求めよ．

(3)　線分AQの長さLの最小値と，そのときのxの値を求めよ．



(1)　$\angle\mathrm{BAP}=\theta$より　$\angle\mathrm{APB}=180^\circ-90^\circ-\angle\mathrm{BAP}=90^\circ-\theta$

よって　$\angle\mathrm{CPQ}=180^\circ-90^\circ-\angle\mathrm{APB}=90^\circ-(90^\circ-\theta)=\boldsymbol{\theta}$

(2)　(1)より $\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{CPQ}$　　よって $\triangle\mathrm{ABP}\backsim\triangle\mathrm{PCQ}$

$1:(1-x)=x:\mathrm{CQ}$　　$\mathrm{CQ}=x(1-x)$

したがって $S=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{CP}\cdot\mathrm{CQ}=\dfrac{1}{2}x(1-x)^2=\dfrac{1}{2}(x^3-2x^2+x)$

$S'=\dfrac{1}{2}(3x^2-4x+1)=\dfrac{1}{2}(x-1)(3x-1)$

$0<x<1$におけるSの増減は右表．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
S'	／	$+$	0	$-$	／
S	／	↗	$\frac{2}{27}$	↘	／

よって　$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{3}}$ **のとき** $\boldsymbol{S}$ **の最大値は** $\boldsymbol{\dfrac{2}{27}}$

(3)　$L^2=\mathrm{AP}^2+\mathrm{PQ}^2=(1+x^2)+\{(1-x)^2+x^2(1-x)^2\}=x^4-2x^3+3x^2-2x+2$

$(L^2)'=4x^3-6x^2+6x-2=2(2x-1)(x^2-x+1)$

$x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ より　L^2の増減表は右表．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$(L^2)'$	／	$-$	0	$+$	／
L^2	／	↘	$\frac{25}{16}$	↗	／

よって　$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2}}$ **のとき**　L^2の最小値は　$\dfrac{25}{16}$

このときLは**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{5}{4}}$ をとる．

第18講　積分法

1　曲線 $C: y=|x^2-4|$ と直線 $l: y=x+2$ について，次の問いに答えよ.

(1)　C のグラフをかけ.

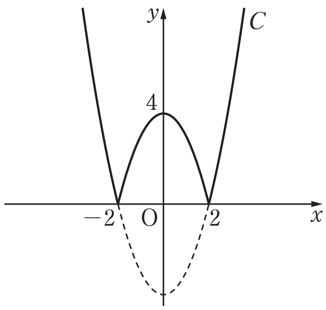
(2)　C と l の交点の x 座標を求めよ.

(3)　C と l で囲まれた部分の面積を求めよ.

(1)　$y=|x^2-4|=|(x+2)(x-2)|$

$$=\begin{cases}(x+2)(x-2) & (x \leqq -2,\ 2 \leqq x)\\ -(x+2)(x-2) & (-2 \leqq x \leqq 2)\end{cases}$$

よって C のグラフは右図.



(2)　$x \leqq -2$, $x \geqq 2$ のとき

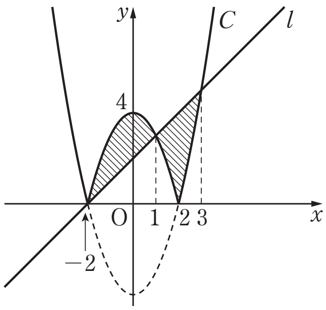
$$x^2-4=x+2 \qquad x^2-x-6=0 \qquad (x+2)(x-3)=0 \qquad x=-2,\ 3$$

$-2 \leqq x \leqq 2$ のとき

$$-x^2+4=x+2 \qquad x^2+x-2=0 \quad (x+2)(x-1)=0 \qquad x=-2,\ 1$$

よって求める交点の x 座標は　$\boldsymbol{x=-2,\ 1,\ 3}$

(3)　求める面積は右図斜線部分



$$\int_{-2}^{1}\{(-x^2+4)-(x+2)\}dx$$

$$+\int_{1}^{2}\{(x+2)-(-x^2+4)\}dx$$

$$+\int_{2}^{3}\{(x+2)-(x^2-4)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx+\int_{1}^{2}(x^2+x-2)dx+\int_{2}^{3}(-x^2+x+6)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{1}^{2}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{2}^{3}$$

$$=-\frac{1}{3}(1+8)-\frac{1}{2}(1-4)+2(1+2)$$

$$+\frac{1}{3}(8-1)+\frac{1}{2}(4-1)-2(2-1)-\frac{1}{3}(27-8)+\frac{1}{2}(9-4)+6(3-2)$$

$$=\frac{1}{3}(-9+7-19)+\frac{1}{2}(3+3+5)+(6-2+6)$$

$$=\boldsymbol{\frac{17}{2}}$$

$\boxed{2}$ [1]　2 つの放物線 $y=x^2-4x+5$ と $y=-x^2-2x+9$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

$y=x^2-4x+5$ と $y=-x^2-2x+9$ の交点の x 座標は

$x^2-4x+5=-x^2-2x+9$

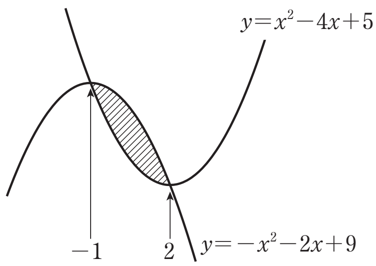
$x^2-x-2=0$　　$(x+1)(x-2)=0$　　よって　$x=-1,\ 2$

求める面積は

$$S=\int_{-1}^{2}\{(-x^2-2x+9)-(x^2-4x+5)\}dx=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx$$

$$=-2\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)dx=-2\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx$$

$$=-2\times\left\{-\frac{1}{6}(2+1)^3\right\}=\mathbf{9}$$



$\boxed{2}$ [2]　$a>0$ のとき，2 つの放物線 $y=x^2-2$，$y=-ax^2+ax-1$ について，次の問いに答えよ．

(1)　2 つの放物線の交点の x 座標を求めよ．

(2)　2 つの放物線で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1)　$y=x^2-2$，$y=-ax^2+ax-1$ より

$x^2-2=-ax^2+ax-1$

$(a+1)x^2-ax-1=0$　　$(x-1)\{(a+1)x+1\}=0$　　$a>0$ より　$\boldsymbol{x=1,\ -\dfrac{1}{a+1}}$

(2)　$a>0$ より　$-\dfrac{1}{a+1}<0$　よって求める面積は

$$\int_{-\frac{1}{a+1}}^{1}\{(-ax^2+ax-1)-(x^2-2)\}dx=\int_{-\frac{1}{a+1}}^{1}\{-(a+1)x^2+ax+1\}dx$$

$$=-\int_{-\frac{1}{a+1}}^{1}(x-1)\{(a+1)x+1\}dx=-(a+1)\int_{-\frac{1}{a+1}}^{1}\left(x+\frac{1}{a+1}\right)(x-1)dx$$

$$=-(a+1)\times\left\{-\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{a+1}\right)^3\right\}=\frac{1}{6}(a+1)\times\left(\frac{a+2}{a+1}\right)^3=\boldsymbol{\frac{(a+2)^3}{6(a+1)^2}}$$

3　(1)　放物線 $C: y=x^2+x-1$ と直線 $l: y=2x+1$ の交点の座標を求めよ．

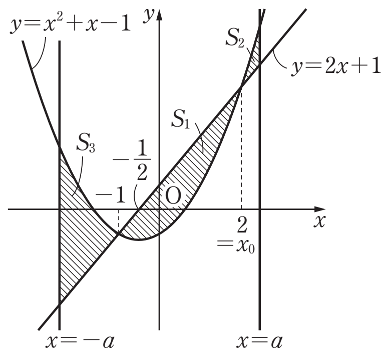
(2)　(1)で求めた交点の x 座標の大きい方を x_0 とする．$a>x_0$ とし，C と l で囲まれた領域の面積を S_1，C と l および直線 $x=a$ で囲まれた領域の面積を S_2，C と l および直線 $x=-a$ で囲まれた領域の面積を S_3 とする．$S_1=S_2+S_3$ となるときの a の値を求めよ．

(1)　C と l の式より y を消去して

$x^2+x-1=2x+1$

$x^2-x-2=0$　　$(x+1)(x-2)=0$　　$x=-1,\ 2$

よって　求める交点の座標は　**$(-1,\ -1),\ (2,\ 5)$**



(2)　$x_0=2$ より，$a>2$　　　グラフは右図．

$S_1=S_2+S_3$ より

$$\int_{-1}^{2}\{(2x+1)-(x^2+x-1)\}dx$$

$$=\int_{-a}^{-1}\{(x^2+x-1)-(2x+1)\}dx+\int_{2}^{a}\{(x^2+x-1)-(2x+1)\}dx$$

$$-\int_{-a}^{-1}(x^2-x-2)dx+\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx-\int_{2}^{a}(x^2-x-2)dx=0$$

$$\int_{-a}^{-1}(-x^2+x+2)dx+\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx+\int_{2}^{a}(-x^2+x+2)dx=0$$

$$\int_{-a}^{a}(-x^2+x+2)dx=0$$

偶関数，奇関数に注意して

$2\int_{0}^{a}(-x^2+2)dx=0$　　　$\left[-\frac{1}{3}x^3+2x\right]_0^a=0$

$-\frac{1}{3}a^3+2a=0$　　$a>0$ より　$a^2-6=0$　　$a^2=6$　　よって　$\boldsymbol{a=\sqrt{6}}$

第19講　微分法・積分法

1　k は定数とし，方程式 $2x^3-9x^2+12x+k^2+7k=0$ について考える．この方程式が異なる3個の実数解をもつとき，k の値の範囲を求めよ．

$f(x)=2x^3-9x^2+12x+k^2+7k$ とおくと　$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f(x)$ の増減表は右図.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

極大値　$f(1)=k^2+7k+5$　　極小値　$f(2)=k^2+7k+4$

よって，$f(x)=0$ が3個の異なる実数解をもつのは

$f(1)>0$　かつ　$f(2)<0$

つまり　$k^2+7k+5>0$　かつ　$k^2+7k+4<0$ のとき.

$k<\dfrac{-7-\sqrt{29}}{2}$，$\dfrac{-7+\sqrt{29}}{2}<k$　かつ　$\dfrac{-7-\sqrt{33}}{2}<k<\dfrac{-7+\sqrt{33}}{2}$ より

求める k の範囲は　$\boldsymbol{\dfrac{-7-\sqrt{33}}{2}<k<\dfrac{-7-\sqrt{29}}{2}}$，$\boldsymbol{\dfrac{-7+\sqrt{29}}{2}<k<\dfrac{-7+\sqrt{33}}{2}}$

(別解)

$2x^3-9x^2+12x+k^2+7k=0$　より　$2x^3-9x^2+12x=-k^2-7k$　……①

$f(x)=2x^3-9x^2+12x$ とおくと　$f'(x)=6x^2+18x-12=6(x-1)(x-2)$

$f(x)$ の増減表は右図.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗	5	↘	4	↗

よって①が異なる3個の実数解をもつのは　$4<-k^2-7k<5$

つまり　$k^2+7k+4<0$　かつ　$k^2+7k+5>0$ のとき.

$\boxed{2}$ ［1］　$f(x)=3x^2+\int_{-1}^{0}xf(t)dt+\int_{0}^{1}f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

$f(x)=3x^2+\int_{-1}^{0}xf(t)dt+\int_{0}^{1}f(t)dt=3x^2+x\int_{-1}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{1}f(t)dt$

$\int_{-1}^{0}f(t)dt=b$，$\int_{0}^{1}f(t)dt=c$ とおくと　$f(x)=3x^2+bx+c$

このとき　$b=\int_{-1}^{0}(3t^2+bt+c)dt=\left[t^3+\frac{b}{2}t^2+ct\right]_{-1}^{0}=0-\left(-1+\frac{b}{2}-c\right)=1-\frac{b}{2}+c$

よって　$3b-2c=2$　……①

$c=\int_{0}^{1}(3t^2+bt+c)dt=\left[t^3+\frac{b}{2}t^2+ct\right]_{0}^{1}=1+\frac{b}{2}+c$

よって　$1+\frac{b}{2}=0$　より　$b=-2$

このとき　①より　$c=-4$　　したがって　$\boldsymbol{f(x)=3x^2-2x-4}$

$\boxed{2}$ ［2］　$f(t)$ を t の2次関数とし，$g(x)=x+\int_{0}^{x}f(t)dt$ とする．$y=g(x)$ は，$x=1$ と $x=2$ で極値をとり，$x=\frac{3}{2}$ での $y=g(x)$ の接線の傾きが $\frac{3}{2}$ であるとする．このとき，$y=g(x)$ の極大値と極小値を求めよ．

$g(x)=x+\int_{0}^{x}f(t)dt$　より　$g'(x)=1+f(x)$

$f(x)$ は2次関数より $g'(x)$ も2次関数．

さらに $g(x)$ は $x=1$，2 で極値をとるので，$g'(x)=a(x-1)(x-2)$ とおける．

$x=\frac{3}{2}$ での $y=g(x)$ の接線の傾きが $\frac{3}{2}$ より　$g'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$

よって　$a\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)=\frac{3}{2}$　　$a=-6$

したがって　$g'(x)=-6(x-1)(x-2)=-6x^2+18x-12$

$g(x)=-2x^3+9x^2-12x+C$（C は積分定数）

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘		↗		↘

ここで　$g(x)=x+\int_{0}^{x}f(t)dt$　より　$g(0)=0+\int_{0}^{0}f(t)dt=0$　より

$g(x)=-2x^3+9x^2-12x$

ゆえに　$y=g(x)$ は　**極大値**　$\boldsymbol{g(2)=-4}$　　**極小値**　$\boldsymbol{g(1)=-5}$　をとる．

3　2曲線 $C_1：y=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$，$C_2：y=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{5}{2}$ の両方に接する直線を l とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　直線 l の方程式を求めよ．

(2)　2曲線 C_1，C_2 と直線 l で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(1)　$C_1：y=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}=x^2-x-\dfrac{1}{4}$ より　$y'=2x-1$

C_1 上の点 $\left(s,\ s^2-s-\dfrac{1}{4}\right)$ における接線は

$$y=(2s-1)(x-s)+s^2-s-\frac{1}{4}=(2s-1)x-s^2-\frac{1}{4}\quad\cdots\cdots①$$

$C_2：y=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{5}{2}=x^2-5x+\dfrac{15}{4}$ より　$y'=2x-5$

C_2 上の点 $\left(t,\ t^2-5t+\dfrac{15}{4}\right)$ における接線は

$$y=(2t-5)(x-t)+t^2-5t+\frac{15}{4}=(2t-5)x-t^2+\frac{15}{4}\quad\cdots\cdots②$$

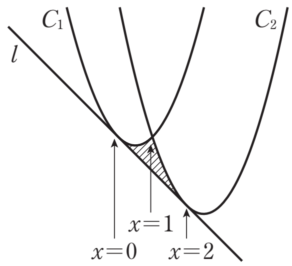
①，②が一致するとき

$$\begin{cases}2s-1=2t-5\\ -s^2-\dfrac{1}{4}=-t^2+\dfrac{15}{4}\end{cases}\qquad \begin{cases}s-t=-2\\ s^2-t^2=-4\end{cases}\qquad \begin{cases}s-t=-2\\ s+t=2\end{cases}\qquad s=0,\ t=2$$

よって求める直線は　$l：\boldsymbol{y=-x-\dfrac{1}{4}}$

(2)　C_1 と C_2 の交点の x 座標は　$x^2-x-\dfrac{1}{4}=x^2-5x+\dfrac{15}{4}$　より　$x=1$

2曲線 C_1，C_2 と直線 l で囲まれた図形の面積は



$$\begin{aligned}S&=\int_0^1\left\{\left(x^2-x-\frac{1}{4}\right)-\left(-x-\frac{1}{4}\right)\right\}dx\\&\quad+\int_1^2\left\{\left(x^2-5x+\frac{15}{4}\right)-\left(-x-\frac{1}{4}\right)\right\}dx\\&=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(x^2-4x+4)dx\\&=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(x-2)^2dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_1^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

第20講　数列(1)

$\boxed{1}$ [1]　初項 $a_1=1$，公差 $\frac{2}{3}$ の等差数列 $\{a_n\}$ と，初項 $b_1=2$，公差 $\frac{3}{2}$ の等差数列 $\{b_n\}$ がある．

(1)　数列 $\{a_n\}$ の項のうち，値が整数となる項を小さい方から順に並べてできる数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に共通に含まれる項を，小さい方から順に並べてできる数列 $\{q_n\}$ の一般項，および初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

(1)　$\{a_n\}：1，\frac{5}{3}，\frac{7}{3}，3，\frac{11}{3}，\frac{13}{3}，5，\frac{17}{3}，\cdots\cdots$

数列 $\{a_n\}$ から整数を抜き出し小さい順に並べたものは　1，3，5，……

これは初項1，公差2の等差数列である．よって求める数列 $\{p_n\}$ の一般項は

$$\boldsymbol{p_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1}$$

(2)　$\{b_n\}：2，\frac{7}{2}，5，\frac{13}{2}，8，\cdots\cdots$

よって数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の共通項からなる数列 $\{q_n\}$ の初項は5

また，数列 $\{q_n\}$ の公差は，数列 $\{a_n\}$ の公差 $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ と数列 $\{b_n\}$ の公差 $\frac{3}{2}=\frac{9}{6}$ の最小公倍数 $\frac{36}{6}=6$ である．

よって求める数列 $\{q_n\}$ の一般項は　$\boldsymbol{q_n}=5+(n-1)\cdot 6=\boldsymbol{6n-1}$

$$\boldsymbol{S_n}=\frac{n(q_1+q_n)}{2}=\frac{n\{5+(6n-1)\}}{2}=\frac{n(6n+4)}{2}=\boldsymbol{n(3n+2)}$$

$\boxed{1}$ [2]　公比が正の数である等比数列について，初めの3項の和が21であり，次の6項の和が1512であるという．この数列の初めの5項の和を求めよ．

題意の等比数列の初項を a，公比を r（$r>0$）とすると，

$$a_1+a_2+a_3=\frac{a(1-r^3)}{1-r}=21 \quad \cdots\cdots①$$

$$a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=\frac{a_4(1-r^6)}{1-r}=\frac{ar^3(1-r^3)(1+r^3)}{1-r}=1512 \quad \cdots\cdots②$$

①を②に代入して　$21r^3(1+r^3)=1512$

$r^3=t$ とおくと　$t(1+t)=72$　　$t^2+t-72=(t+9)(t-8)=0$　　$t=-9，8$

つまり　$r^3=-9，8$　　$r>0$ より　$r=2$　　このとき①より　$\frac{a(1-8)}{1-2}=21$　　$a=3$

よって求める和は　$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\frac{3(2^5-1)}{2-1}=\boldsymbol{93}$

$\boxed{2}$ ［1］　数列 7, 67, 667, 6667, …… の第 n 項を求めよ.

$n \geqq 2$ のとき，第 n 項は

$$7+60+600+6000+\cdots\cdots+6\cdot 10^{n-1}$$
$$=7+\frac{60\cdot(10^{n-1}-1)}{10-1}$$
$$=7+\frac{20(10^{n-1}-1)}{3}$$
$$=\boldsymbol{\frac{2\cdot 10^n+1}{3}}$$

（$n=1$ のときも成立）

$\boxed{2}$ ［2］　$a_n=n(n-1)+1$ で表される数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ.

$a_n=n(n-1)+1=n^2-n+1$ より

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)+n$$
$$=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-3(n+1)+6\}$$
$$=\frac{1}{6}n(2n^2+4)$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(n^2+2)}$$

$\boxed{2}$ ［3］　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+k}$ を n の式で表せ.

$\displaystyle\frac{1}{k^2+k}=\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ より

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$
$$=\boldsymbol{\frac{n}{n+1}}$$

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ について，初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n(2n+1)$ となるとき，次の問に答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ を初項 1，公比 2 の等比数列とし，数列 $\{c_n\}$ を $c_n=a_nb_n$ とする．数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和 T_n を求めよ．

(1) $S_n=n(2n+1)=2n^2+n$ ……① より，$a_1=S_1=3$

$n\geqq 2$ のとき　$S_{n-1}=2(n-1)^2+(n-1)=2n^2-3n+1$ ……②

①−②より　$S_n-S_{n-1}=4n-1$ 　つまり　$\boldsymbol{a_n=4n-1}$（$n=1$ のときも成り立つ）

(2) $b_n=1\cdot2^{n-1}=2^{n-1}$ より　$c_n=a_nb_n=(4n-1)\cdot2^{n-1}$

$T_n=3\cdot1+7\cdot2+11\cdot2^2+\cdots\cdots+(4n-1)\cdot2^{n-1}$ ……③

$2T_n=3\cdot2+7\cdot2^2+11\cdot2^3+\cdots\cdots+(4n-1)\cdot2^n$ ……④

③−④より

$$\begin{aligned}-T_n&=3+(4\cdot2+4\cdot2^2+\cdots\cdots+4\cdot2^{n-1})-(4n-1)\cdot2^n\\&=3+\frac{8(2^{n-1}-1)}{2-1}-(4n-1)\cdot2^n\\&=3+4\cdot2^n-8-(4n-1)\cdot2^n\\&=-5+(-4n+5)\cdot2^n\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{T_n=(4n-5)\cdot2^n+5}$

第21講　数列(2)

1　2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある．

①　$a_1=2$，$a_2=42$　　②　$b_n=a_{n+1}-a_n$ で，$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n-4$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

を満たすとき，つぎの問に答えよ．

(1)　数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$b_1=a_2-a_1=40$

$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n-4$ より　$b_{n+1}+8=\dfrac{1}{2}(b_n+8)$

よって数列 $\{b_n+8\}$ は，初項 $b_1+8=48$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である．

$b_n+8=48\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　　ゆえに　$\boldsymbol{b_n=48\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-8}$

(2)　$b_n=a_{n+1}-a_n$ より，数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列である．

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{48\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-8\right\}$$

$$=2+\frac{48\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}-8(n-1)=106-8n-96\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad(n=1\text{ のときも成立})$$

よって　$\boldsymbol{a_n=106-8n-96\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}$

$\boxed{2}$ 一般項が $a_k=2k-1$ の数列に，次のような規則で縦棒による区切りを入れて区分けする．その規則とは，区分けされた n 番目の部分（これを第 n 群と呼ぶことにする）が $2n-1$ 個の項からなるように区切るものである．

$1\,|\,3,\ 5,\ 7\,|\,9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17\,|\,19,\ 21,\ 23,\ 25,\ 27,\ 29,\ 31\,|\,33,\ 35,\ 37,\ \cdots\cdots$

このとき，例えば第3群は9，11，13，15，17の5つの項からなるので，第3群の初項は9，末項は17，中央の項は3番目の13である．また，第3群の総和は $9+11+13+15+17=65$ であり，15は第3群の第4項である．

(1) 第 n 群の末項を n の式で表せ．

(2) 第 n 群の初項，中央の項を n の式で表せ．

(3) 第 n 群の項の総和 $S(n)$ を n の式で表せ．

(4) 2013は第何群の第何項か．

(1) 第 k 群には $2k-1$ 個の項がある．

第 n 群の末項は，はじめから数えて $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n=n^2$（番目）の項である．

よって第 n 群の末項は　$a_{n^2}=\boldsymbol{2n^2-1}$

(2) 第 n 群（$n\geqq 2$）の初項は，はじめから数えて $(n-1)^2+1=n^2-2n+2$（番目）の項である（これは $n=1$ のときも成り立つ）．

よって第 n 群の初項は　$a_{(n^2-2n+2)}=2(n^2-2n+2)-1=\boldsymbol{2n^2-4n+3}$

また第 n 群の中央の項は，はじめから数えて $(n-1)^2+n=n^2-n+1$（番目）の項である（これは $n=1$ のときも成り立つ）．

よって第 n 群の中央の項は　$a_{(n^2-n+1)}=2(n^2-n+1)-1=\boldsymbol{2n^2-2n+1}$

(3) 第 n 群は初項 $2n^2-4n+3$　末項 $2n^2-1$　項数 $2n-1$ の等差数列より，その総和は

$$S(n)=\frac{(2n-1)\{(2n^2-4n+3)+(2n^2-1)\}}{2}=\boldsymbol{4n^3-6n^2+4n-1}$$

(4) $2k-1=2013$ より　$k=1007$　　よって2013は，はじめから数えて1007番目の項．

これが第 n 群に属するとすると，$(n-1)^2<1007\leqq n^2$

$31^2=961$，$32^2=1024$ より，これを満たす自然数 n は $n=32$

第31群の末項までの項数は $31^2=961$　　したがって2013は**第32群の第46項**

3 [1]　$n \geqq 2$ であるような自然数 n に対して

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots\cdots+(n-1)\cdot n\cdot(n+1)=(1+2+3+\cdots\cdots+n)(2+3+\cdots\cdots+n)$$

が成り立つことを示せ.

$$(1+2+3+\cdots\cdots+n)(2+3+\cdots\cdots+n)=\left\{\frac{n(1+n)}{2}\right\}\left\{\frac{(n-1)(2+n)}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2)$$

よって，$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots\cdots+(n-1)\cdot n\cdot(n+1)=\dfrac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2)$　……①　が

$n \geqq 2$ のすべての自然数 n で成立することを証明する.

$n=2$ のとき　①の左辺$=1\cdot2\cdot3=6$　　①の右辺$=\dfrac{1}{4}\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4=6$　より成立.

$n=k(\geqq 2)$ のとき　①が成り立つと仮定する.

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots\cdots+(k-1)\cdot k\cdot(k+1)=\frac{1}{4}(k-1)k(k+1)(k+2)$$

このとき

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots\cdots+(k-1)\cdot k\cdot(k+1)+k(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{1}{4}(k-1)k(k+1)(k+2)+k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}k(k+1)(k+2)\{(k-1)+4\}$$

$=\dfrac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3)$　より，①は $n=k+1$ のときも成り立つ.

以上より①は2以上のすべての自然数 n で成り立つ．よって示された.

3 [2]　次の式で定められる数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ.

$$a_1=5\quad,\quad a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{8}{a_n}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　すべての自然数 n に対して　$a_n>4$ が成り立つことを示せ.

(2)　すべての自然数 n に対して　$a_{n+1}<a_n$ が成り立つことを示せ.

(1)　$a_n>4$　……①　について　　$n=1$ のとき $a_1=5$ より①は成り立つ.

$n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると　$a_k>4$

このとき　$a_{k+1}-4=\dfrac{a_k}{2}+\dfrac{8}{a_k}-4=\dfrac{{a_k}^2-8a_k+16}{2a_k}=\dfrac{(a_k-4)^2}{2a_k}>\dfrac{(4-4)^2}{2a_k}=0$

よって　$a_{k+1}>4$　より①は　$n=k+1$ のときも成り立つ.

したがってすべての自然数 n で①が成り立つ.

(2)　(1)を用いると　$a_n>4$ より

$$a_n-a_{n+1}=a_n-\left(\frac{a_n}{2}+\frac{8}{a_n}\right)=\frac{a_n}{2}-\frac{8}{a_n}=\frac{{a_n}^2-16}{2a_n}>\frac{4^2-16}{2a_n}=0$$

よって　$a_{n+1}<a_n$ が示された.

第22講　平面ベクトル(1)

$\boxed{1}$ [1]　△OAB において，$\mathrm{OA}=\sqrt{7}$，$\mathrm{OB}=1$，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$ とする．このとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ．

$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とすると，余弦定理により

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2}{2\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}=\frac{7+1-3}{2\cdot\sqrt{7}\cdot1}=\frac{5}{2\sqrt{7}}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta=\sqrt{7}\times1\times\frac{5}{2\sqrt{7}}=\boldsymbol{\frac{5}{2}}$

(別解)　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{3}$　より　$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{3}$　　$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=3$

$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=3$　　$1-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+7=3$　　よって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{5}{2}$

$\boxed{1}$ [2]　ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$，$\vec{c}=(2,\ 1)$ とする．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ として次の問に答えよ．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，および $\cos\theta$ の値を求めよ．

(2)　t を実数とし，$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ とおく．$\vec{p}$ と $\vec{c}$ が垂直であるとき，および平行であるときの t の値をそれぞれ求めよ．

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times3+3\times4=\mathbf{15}$　　　$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{15}{\sqrt{10}\times5}=\boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{10}}}$

(2)　$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}=(1,\ 3)+t(3,\ 4)=(1+3t,\ 3+4t)$

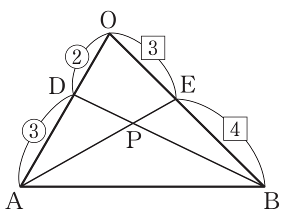
$\vec{p}\perp\vec{c}$ のとき　$\vec{p}\cdot\vec{c}=0$　つまり　$(1+3t)\times2+(3+4t)\times1=0$　よって　$\boldsymbol{t=-\frac{1}{2}}$

$\vec{p}\parallel\vec{c}$ のとき　$(1+3t)\times1-(3+4t)\times2=0$　　よって　$\boldsymbol{t=-1}$

$\boxed{2}$ [1]　△OAB において，辺 OA を 2：3，辺 OB を 3：4 に内分する点をそれぞれ D，E とする．また，線分 AE と線分 BD の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

AP：PE$=t$：$(1-t)$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{7}t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　……①

DP：PB$=s$：$(1-s)$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{2}{5}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　……②



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は1次独立より①，②から　$1-t=\frac{2}{5}(1-s)$，$\frac{3}{7}t=s$

これらより　$s=\frac{9}{29}$，$t=\frac{21}{29}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{8}{29}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{9}{29}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　より

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{-\frac{21}{29}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{9}{29}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

(別解)　メネラウスの定理により $\dfrac{\mathrm{OB}}{\mathrm{BE}}\cdot\dfrac{\mathrm{EP}}{\mathrm{PA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DO}}=1$　つまり　$\dfrac{7}{4}\cdot\dfrac{\mathrm{EP}}{\mathrm{PA}}\cdot\dfrac{3}{2}=1$

よって　$\dfrac{\mathrm{EP}}{\mathrm{PA}}=\dfrac{8}{21}$　　したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{8}{29}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{21}{29}\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{8}{29}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{9}{29}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

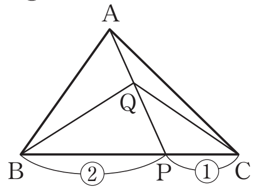
$\boxed{2}$ [2]　△ABC の辺 BC を 2：1 に内分する点を P とし，線分 AP 上に点 Q がある．等式 $4\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+2\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\vec{0}$ が成り立つとき，$\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QP}}$ の値を求めよ．

---

t を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\dfrac{1}{3}t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{3}t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　……①　とおく．

$4\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+2\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\vec{0}$　より

$4\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+(\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+2(\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\vec{0}$　　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　……②



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は1次独立より，①，②から

$\dfrac{1}{3}t=\dfrac{1}{7}$，$\dfrac{2}{3}t=\dfrac{2}{7}$　　これらは　$t=\dfrac{3}{7}$ のとき，ともに成立する．

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$　より　$\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QP}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

$\boxed{3}$　平行四辺形 OABC について，辺 AB を 1：2 に内分する点を D とし，線分 CD を 3：4 に内分する点を E とする．また，直線 OE と辺 BC との交点を F とする．

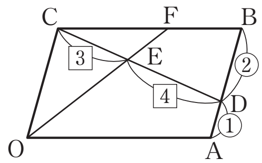
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(2)　△CEF の面積は平行四辺形 OABC の面積の何倍か．

---

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{3}{7}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{5}{7}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より t，s を実数として

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=t\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{3}{7}t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{5}{7}t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　……①



また，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CB}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　……②

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は1次独立より，①，②から

$\dfrac{3}{7}t=s$，$\dfrac{5}{7}t=1$　　よって　$t=\dfrac{7}{5}$，$s=\dfrac{3}{5}$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}$

(2)　(1)より　OE：EF＝5：2，CF：FB＝3：2

よって，平行四辺形 OABC の面積を S とすると

$\triangle\mathrm{CEF}=\dfrac{2}{7}\triangle\mathrm{COF}=\dfrac{2}{7}\times\dfrac{3}{5}\triangle\mathrm{COB}=\dfrac{6}{35}\times\dfrac{1}{2}S=\dfrac{3}{35}S$　　よって　$\boldsymbol{\dfrac{3}{35}}$ **倍**

第23講　平面ベクトル(2)

1　3点O，A，Bがあり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくと，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{5}{6}$ が成り立っている．OAの中点をPとし，半直線AB上に AB：AH＝1：s $(s>0)$ となる点Hをとる．

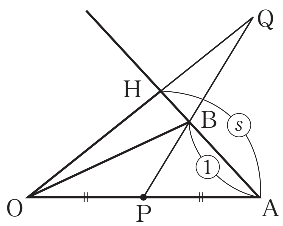
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を s，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2)　直線OHと直線ABが垂直に交わるような s の値を求めよ．

(3)　(2)のとき，直線OHと直線PBの交点をQとする．$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(1)　AB：AH＝1：s より　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})=\boldsymbol{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}}$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}=3\times2\times\dfrac{5}{6}=5$



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=0$

$(\vec{b}-\vec{a})\cdot\{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\}=0$

つまり　$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\}=0$

$(1-s)|\vec{a}|^2+s\vec{a}\cdot\vec{b}-(1-s)\vec{a}\cdot\vec{b}-s|\vec{b}|^2=0$

$9(1-s)+5s-5(1-s)-4s=0$　　　よって　$\boldsymbol{s=\dfrac{4}{3}}$

(3)　点Qは直線BP上の点より，t を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\quad\cdots\cdots①$$ とおける．

また，点Qは直線OH上の点より，u を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=u\overrightarrow{\mathrm{OH}}=u\left(-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}\right)=-\frac{1}{3}u\vec{a}+\frac{4}{3}u\vec{b}\quad\cdots\cdots②$$ とおける．

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は1次独立より，①，②から　$\dfrac{1}{2}(1-t)=-\dfrac{1}{3}u$，$t=\dfrac{4}{3}u$　よって　$t=2$，$u=\dfrac{3}{2}$

したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}}$

(別解)　(2)より HB：BA＝$\dfrac{1}{3}$：1＝1：3

メネラウスの定理より　$\dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{QH}}\cdot\dfrac{\mathrm{HB}}{\mathrm{BA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PO}}=1$

つまり　$\dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{QH}}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1}=1$　より　$\dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{QH}}=\dfrac{3}{1}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{4}{3}\vec{b}\right)=-\dfrac{1}{2}a+2\vec{b}$

$\boxed{2}$　半径1の外接円をもつ三角形ABCの外心をOとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく．$2\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ．

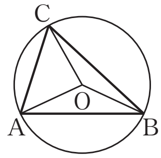
(2)　辺ABの長さを求めよ．

(3)　三角形ABCの面積を求めよ．

(1)　$2\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$ より　$2\vec{a}+3\vec{b}=-3\vec{c}$

$|2\vec{a}+3\vec{b}|=|3\vec{c}|$　つまり　$|2\vec{a}+3\vec{b}|^2=|3\vec{c}|^2$

$4|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=9|\vec{c}|^2$　$4+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9=9$　　よって　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{3}}$



$2\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$ より　$3\vec{b}+3\vec{c}=-2\vec{a}$

$|3\vec{b}+3\vec{c}|=|2\vec{a}|$　つまり　$|3\vec{b}+3\vec{c}|^2=|2\vec{a}|^2$

$9|\vec{b}|^2+18\vec{b}\cdot\vec{c}+9|\vec{c}|^2=4|\vec{a}|^2$　$9+18\vec{b}\cdot\vec{c}+9=4$　　よって　$\boldsymbol{\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{7}{9}}$

(2)　$|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=1-2\times\left(-\frac{1}{3}\right)+1=\frac{8}{3}$

よって　$AB=|\overrightarrow{AB}|=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{6}}{3}}$

(3)　(1)と同様に $\vec{c}\cdot\vec{a}=-\frac{1}{3}$

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1^2\times1^2-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\triangle OBC=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1^2\times1^2-\left(-\frac{7}{9}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{32}{81}}=\frac{2\sqrt{2}}{9}$$

$$\triangle OCA=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{c}|^2|\vec{a}|^2-(\vec{c}\cdot\vec{a})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1^2\times1^2-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

よって　$\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA=\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{9}+\frac{\sqrt{2}}{3}=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}}{9}}$

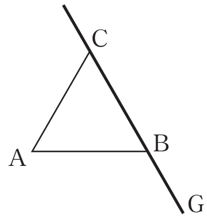
$\boxed{3}$　三角形ABCを1辺の長さが1の正三角形とする．以下の問いに答えよ．

(1)　実数 s，t が $s+t=1$ を満たしながら動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす点Pの軌跡Gを正三角形ABCとともに図示せよ．

(2)　実数 s，t が $s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$1\leqq s+t\leqq 2$ を満たしながら動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす点Pの存在範囲 D を正三角形ABCとともに図示し，領域 D の面積 S を求めよ．

(1)　点Pの描く軌跡は直線BC.

その軌跡Gは右図.



(2)　$s+t=k$ とおくと，$1\leqq k\leqq 2$

$k\neq 0$ より $\dfrac{s}{k}+\dfrac{t}{k}=1$，$\dfrac{s}{k}\geqq 0$，$\dfrac{t}{k}\geqq 0$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{s}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{AB}})+\frac{t}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{AC}})$$

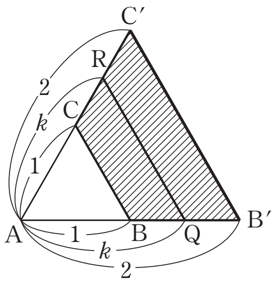
$k\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$，$k\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{s}{k}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\frac{t}{k}\overrightarrow{\mathrm{AR}}\quad\left(\frac{s}{k}+\frac{t}{k}=1,\ \frac{s}{k}\geqq 0,\ \frac{t}{k}\geqq 0\right)$$

よって点Pが描く軌跡は線分QR

$1\leqq k\leqq 2$ で k を動かすことにより，Pの存在範囲 D は

右図台形BCC′B′の周および内部 ($\overrightarrow{\mathrm{AB'}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$)

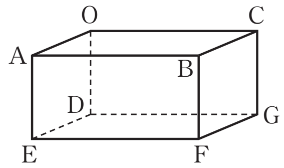


$\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{AB'C'}=1^2:2^2=1:4$ より

$$S=3\times\triangle\mathrm{ABC}=3\times\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin 60^\circ=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$$

第24講　空間ベクトル

1　直方体 OABC-DEFG において，OA＝OD＝1，OC＝2 とし，辺 EF の中点を M とする．また，$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OD}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ とし，点 P から線分 CM におろした垂線と線分 CM との交点を H とする．$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$，$\vec{d}=\overrightarrow{OD}$ とおくとき，以下の問いに答えよ．



(1)　$\overrightarrow{PC}$，$\overrightarrow{CM}$，$\overrightarrow{PM}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，t を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{PH}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，t を用いて表せ．

(3)　$|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{PH}|^2$ の最小値を求めよ．

(1)　$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{-t\vec{d}+\vec{c}}$

$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FM}=\boldsymbol{\vec{d}+\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}}$

$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EM}=\boldsymbol{(1-t)\vec{d}+\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}}$

(2)　点 H は直線 CM 上の点より，s を実数として

$$\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{PC}+s\overrightarrow{CM}=(\vec{c}-t\vec{d})+s\left(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)=s\vec{a}+\left(1-\frac{s}{2}\right)\vec{c}+(s-t)\vec{d}$$

$\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{CM}$ より $\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{CM}=0$

$$\left\{s\vec{a}+\left(1-\frac{s}{2}\right)\vec{c}+(s-t)\vec{d}\right\}\cdot\left(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)=0$$

$|\vec{a}|=|\vec{d}|=1$，$|\vec{c}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{a}=0$ より

$$s\times 1^2-\frac{1}{2}\left(1-\frac{s}{2}\right)\times 2^2+(s-t)\times 1^2=0 \qquad s=\frac{1}{3}(t+2)$$

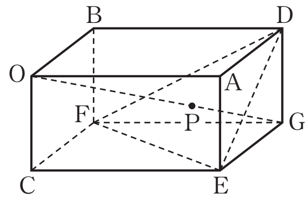
よって　$\overrightarrow{PH}=\boldsymbol{\frac{1}{3}(t+2)\vec{a}+\frac{1}{6}(4-t)\vec{c}+\frac{2}{3}(1-t)\vec{d}}$

(3)　$|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{PH}|^2=t^2+\left\{\frac{1}{9}(t+2)^2+\frac{4}{36}(4-t)^2+\frac{4}{9}(1-t)^2\right\}$

$$=\frac{5}{3}t^2-\frac{4}{3}t+\frac{8}{3}=\frac{5}{3}\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{12}{5}$$

$0\leqq t\leqq 1$ より　$t=\frac{2}{5}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\frac{12}{5}}$ をとる．

2　[1]　直方体 OADB-CEGF において，直線 OG と平面 DEF の交点を P とする．
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ として，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．



点 P は OG 上の点より，k を実数として

$\overrightarrow{OP}=k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=k\vec{a}+k\vec{b}+k\vec{c}$　……①　とおける．

また，点 P は平面 DEF 上の点より，s，t，u を実数として

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=s\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OE}+u\overrightarrow{OF}\\&=s(\vec{a}+\vec{b})+t(\vec{a}+\vec{c})+u(\vec{b}+\vec{c})\\&=(s+t)\vec{a}+(s+u)\vec{b}+(u+t)\vec{c}\quad\cdots\cdots②\end{aligned}$$ と表され，

$s+t+u=1$　……③　である．

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は1次独立より　$s+t=k$，$s+u=k$，$u+t=k$

これらより　$s=t=u=\dfrac{k}{2}$　これと③より　$\dfrac{k}{2}+\dfrac{k}{2}+\dfrac{k}{2}=1$　　$k=\dfrac{2}{3}$

よって　$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}}$

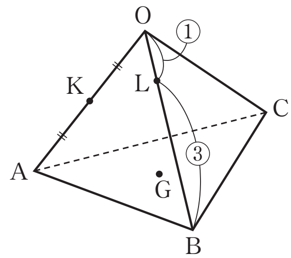
2　[2]　四面体 OABC において線分 OA の中点を K，線分 OB を 1：3 に内分する点を L，△ABC の重心を G とする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく．

(1)　$\overrightarrow{KL}$，$\overrightarrow{KG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

(2)　3点 K，L，G で定まる平面と線分 BC の交点を N とする．N が線分 BC を t：$(1-t)$ に内分するとき，t の値を求めよ．

(1)　$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OK}=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{a}}$

$\overrightarrow{KG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OK}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)-\dfrac{1}{2}\vec{a}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}}$



(2)　点 N は線分 BC を t：$(1-t)$ に内分する点であることより

$\overrightarrow{ON}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$　……①　と表せる．

また，点 N は平面 KLG 上の点より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON}&=\overrightarrow{OK}+x\overrightarrow{KL}+y\overrightarrow{KG}\\&=\frac{1}{2}\vec{a}+x\left(\frac{1}{4}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)+y\left(-\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2}-\frac{y}{6}\right)\vec{a}+\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{3}\right)\vec{b}+\frac{y}{3}\vec{c}\quad\cdots\cdots②\end{aligned}$$ と表せる．

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は1次独立より　①，②から　$\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{6}=0$，$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=1-t$，$\dfrac{y}{3}=t$

第3式より　$y=3t$　これを他の2式に代入して　$\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{2}-\dfrac{t}{2}=0$，$\dfrac{x}{4}+t=1-t$

これらより　$\boldsymbol{t=\dfrac{3}{7}}$　$\left(x=\dfrac{4}{7},\ y=\dfrac{9}{7}\right)$

$\boxed{3}$ 座標平面において，3 点 A(3，2，0)，B(2，3，1)，C(2，0，−1) の定める平面を α とし，原点 O から平面 α に垂線 OH を下ろす．

(1) 内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ．

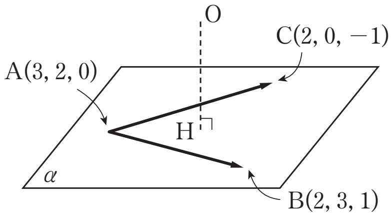
(2) $\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ となる実数 s，t を求めよ．

(3) 点 H の座標を求めよ．

(4) 4 点 O，A，B，C を頂点とする四面体 OABC の体積を求めよ．

(1) $\overrightarrow{AB}=(-1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,\ -2,\ -1)$ より　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1-2-1=\mathbf{-2}$

(2) $\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ より $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より

$(\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=0$

よって　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}+s|\overrightarrow{AB}|^2+t\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$　……①

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ より

$(\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=0$

よって　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}+s\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+t|\overrightarrow{AC}|^2=0$　……②

$|\overrightarrow{AB}|^2=(-1)^2+1^2+1^2=3$，$|\overrightarrow{AC}|^2=(-1)^2+(-2)^2+(-1)^2=6$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=-3+2=-1$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=-3-4=-7$ より

①から　$3s-2t-1=0$　　②から　$-2s+6t-7=0$

これらより　$\boldsymbol{s=\frac{10}{7}}$，$\boldsymbol{t=\frac{23}{14}}$

(3) (2)より　$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\frac{10}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{23}{14}\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{1}{14},\ \frac{1}{7},\ -\frac{3}{14}\right)$

よって　$\mathbf{H}\boldsymbol{\left(-\frac{1}{14},\ \frac{1}{7},\ -\frac{3}{14}\right)}$

(4) $\overrightarrow{OH}=-\frac{1}{14}(1,\ -2,\ 3)$　より　$|\overrightarrow{OH}|=\frac{1}{14}\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\frac{\sqrt{14}}{14}=\frac{1}{\sqrt{14}}$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3\times6-(-2)^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}$

よって四面体 OABC の体積 V は

$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot OH=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{14}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$

練習問題解答

第1講　数と式

(1)　$x=\sqrt{5+\sqrt{21}}$，$y=\sqrt{5-\sqrt{21}}$ のとき，$x^2+y^2=\boxed{\text{アイ}}$，$xy=\boxed{\text{ウ}}$，
$x+y=\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}$ である．

(2)　$2+\sqrt{6}=\sqrt{\boxed{\text{カ}}}(\sqrt{\boxed{\text{カ}}}+\sqrt{3})$ より $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{6}}$ を簡単にすると
$\sqrt{\boxed{\text{キ}}}-\sqrt{\boxed{\text{ク}}}-2+\sqrt{6}$ である．

(3)　$x+y+z=1-2\sqrt{7}$，$xy+yz+zx=9-2\sqrt{7}$ のとき，$x^2+y^2+z^2=\boxed{\text{ケコ}}$ である．

解答例

(1)　$x^2+y^2=5+\sqrt{21}+5-\sqrt{21}=\mathbf{10}$

$xy=\sqrt{(5+\sqrt{21})(5-\sqrt{21})}=\sqrt{25-21}=\sqrt{4}=\mathbf{2}$

$x^2+y^2=10$　より

$(x+y)^2-2xy=10$　　$(x+y)^2=14$　　$x>0$，$y>0$ より $x+y=\sqrt{\mathbf{14}}$

(2)　$2+\sqrt{6}=\sqrt{\mathbf{2}}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ より

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{6}}&=\frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\frac{1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\\&=\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\}\{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}}\\&=\frac{\sqrt{6}-2-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(2-1)(3-2)}\\&=\sqrt{\mathbf{2}}-\sqrt{\mathbf{3}}-2+\sqrt{6}\end{aligned}$$

(3)　$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$ より

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\\&=(1-2\sqrt{7})^2-2(9-2\sqrt{7})\\&=29-4\sqrt{7}-18+4\sqrt{7}\\&=\mathbf{11}\end{aligned}$$

第２講　１次不等式・２次方程式

(1)　x についての不等式 $ax+3>2x$ の解は

$a>$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき　$x>\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}-a}$　　$a<$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき　$x<\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}-a}$

$a=$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき　$\boxed{\text{エ}}$ である．

$\boxed{\text{エ}}$ については　①：すべての実数　②：解なし　から選べ．

(2)　異なる２つの２次方程式 $x^2+ax+b=0$ ……①　$x^2+bx+a=0$ ……②　がただ１つの共通の解をもつとき，その共通解は $\boxed{\text{オ}}$ である．またこのとき，共通でない解の和は $\boxed{\text{カキ}}$ である．

解答例

(1)　$ax+3>2x$　より　$(a-2)x>-3$　……①

$a>2$ のとき　①より　$x>\dfrac{3}{2-a}$　　$a<2$ のとき　①より　$x<\dfrac{3}{2-a}$

$a=2$ のとき　①は　$0\cdot x>-3$　つまり　$0>-3$　となり

x がどのような実数でも成立する．

よって求める解は

$a>\mathbf{2}$ のとき　$x>\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}-a}$　　$a<2$ のとき　$x<\dfrac{3}{2-a}$

$a=2$ のとき　すべての実数（①）

(2)　①と②の共通解を α とすると

$\alpha^2+a\alpha+b=0$　……　③　　$\alpha^2+b\alpha+a=0$　……④

③−④より　$(a-b)\alpha-(a-b)=0$　　$(a-b)(\alpha-1)=0$

よって　$a=b$　または　$\alpha=1$

$a=b$ のとき　方程式①と②は一致し不適．

$\alpha=1$ のとき　③，④から　$1+a+b=0$　つまり　$b=-a-1$

このとき　①より　$x^2+ax-a-1=0$　　$(x-1)(x+a+1)=0$　　$x=1,\ -a-1$

②より　$x^2+(-a-1)x+a=0$　　$(x-1)(x-a)=0$　　$x=1,\ a$

よって　$-a-1\neq a$ ならば①と②は確かにただ１つの共通解 $x=\mathbf{1}$ をもつ．

また，共通でない解の和は　$(-a-1)+a=\mathbf{-1}$　である．

第３講　２次関数(1)

(1)　放物線 $y=3x^2$ を x 軸方向に a，y 軸方向に b 平行移動したグラフが２点 $(-6,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通るとき，$a=-\boxed{\text{ア}}$，$b=-\boxed{\text{イウ}}$ である．

(2)　$y=-3x^2+2ax+a$ の最大値を m とするとき，m の最小値は $-\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である．

(3)　$f(x)=x^2+ax-2a+6$ の $x\geqq 0$ における最小値は

$a\leqq\boxed{\text{カ}}$ のとき　$-\dfrac{a^2}{\boxed{\text{キ}}}-\boxed{\text{ク}}a+6$

$a\geqq\boxed{\text{カ}}$ のとき　$-\boxed{\text{ケ}}a+6$

である．よって，$f(x)$ の $x\geqq 0$ における最小値が１になるような a の値は $\boxed{\text{コ}}$ 個ある．

解答例

(1)　移動後の放物線は，x^2 の係数が３で２点 $(-6,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通るので
その方程式は　$y=3(x+6)(x-2)$　と表せる．
変形すると　$y=3x^2+12x-36=3(x+2)^2-48$　より，頂点の座標は　$(-2,\ -48)$ である．移動前の放物線の頂点の座標は $(0,\ 0)$ より，
x 軸方向に -2，y 軸方向に -48 移動したことがわかる．　よって　$a=\mathbf{-2}$，$b=\mathbf{-48}$

(2)　$y=-3x^2+2ax+a=-3\left(x-\dfrac{a}{3}\right)^2+\dfrac{a^2}{3}+a$

よって　$x=\dfrac{a}{3}$ のとき　最大値　$m=\dfrac{1}{3}a^2+a$

また，$m=\dfrac{1}{3}\left(a+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}$　より　m は $a=-\dfrac{3}{2}$ のとき最小値 $-\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$ をとる．

(3)　$f(x)=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}-2a+6$　$(x\geqq 0)$

$-\dfrac{a}{2}\geqq 0$　つまり　$a\leqq\mathbf{0}$ のとき　　最小値　$f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{\mathbf{4}}-\mathbf{2}a+6$

$-\dfrac{a}{2}\leqq 0$　つまり　$a\geqq 0$ のとき　　最小値　$f(0)=-\mathbf{2}a+6$

$-\dfrac{a^2}{4}-2a+6=1$　より　$(a+10)(a-2)=0$　$a\leqq 0$ より　$a=-10$

$-2a+6=1$　より　$a=\dfrac{5}{2}$　これは $a\geqq 0$ を満たす．

よって題意を満たす a の値は　**２** 個

第４講　２次関数(2)

(1)　a を正の整数とする．x の２次不等式 $x^2-6x-a^2-2a+8\leqq 0$ を満たす整数が 33 個あるとき，$a=\boxed{アイ}$ である．

(2)　すべての実数 x に対して $ax^2+(a+1)x+a<0$ が成り立つような定数 a の値の範囲は $a<-\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である．

(3)　２次方程式 $x^2-2kx+k+2=0$　……①が１より大きい異なる２つの実数解をもつような定数 k の値の範囲は $\boxed{オ}<k<\boxed{カ}$ である．また①が $x=1$ を解にもつとき，もう１解は $x=\boxed{キ}$ である．

解答例

(1)　$x^2-6x-a^2-2a+8\leqq 0$　……①　を変形して

$x^2-6x-(a+4)(a-2)\leqq 0$　　　$(x-a-4)(x+a-2)\leqq 0$

$a>0$ より　$-a+2<a+4$　　よって　①の解は　$-a+2\leqq x\leqq a+4$

これを満たす整数 x が 33 個より　$(a+4)-(-a+2)+1=33$　　したがって　$a=\mathbf{15}$

(2)　$ax^2+(a+1)x+a<0$　……①　について

$a=0$ のとき　①は $x<0$　　これはすべての実数 x では成り立たず不適．

$a\neq 0$ のとき　$f(x)=ax^2+(a+1)x+a$ とおき，方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

①がすべての実数 x に対して成り立つのは　$a<0$　かつ　$D<0$　のとき．

$D=(a+1)^2-4\cdot a\cdot a=-3a^2+2a+1$　より　$-3a^2+2a+1<0$

$3a^2-2a-1>0$　　$(3a+1)(a-1)>0$　　$a<-\dfrac{1}{3}$，$1<a$

$a<0$ を考慮し，求める a の値の範囲は　$a<-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

(3)　$f(x)=x^2-2kx+k+2$　とおくと，$f(x)$ の軸は　$x=k$

また，①の判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-1\cdot(k+2)=k^2-k-2=(k+1)(k-2)$

$f(x)$ が x 軸の $x>1$ の部分と２つの共有点をもつのは

$f(1)>0$　かつ　$1<k$　かつ　$D>0$　のとき

よって　$k<3$　かつ　$k>1$　かつ　$k<-1$，$2<k$　　より　$\mathbf{2<k<3}$

①が $x=1$ を解にもつとき　$f(1)=0$　　よって　$k=3$

このとき①は　$x^2-6x+5=0$　より　①のもう１解は　$x=\mathbf{5}$

第５講　場合の数(1)

(1)　0，2，4，6，8 から異なる 4 個を並べて 4 桁の整数を作るとき，4 桁の整数は全部で $\boxed{\text{アイ}}$ 個あり，このうち，5 の倍数は $\boxed{\text{ウエ}}$ 個，3 の倍数は $\boxed{\text{オカ}}$ 個ある．

(2)　男子 4 人と女子 3 人を円形に並べるとき，女子どうしが隣り合わないような並べ方は $\boxed{\text{キクケ}}$ 通りある．

(3)　7 個の数字 1，1，1，2，2，3，3 をすべて用いて 7 桁の整数を作るとき，数字の並びが左右対称なものは $\boxed{\text{コ}}$ 通りある．また，できた 7 桁の整数を小さい順に並べるとき，3211231 は $\boxed{\text{サシス}}$ 番目に現れる．

解答例

(1)　4 桁の整数は全部で $4\times{}_4P_3=4\times4\cdot3\cdot2=\mathbf{96}$（個）できる．

このうち，5 の倍数となるのは一の位が 0 のときで，${}_4P_3=\mathbf{24}$（個）

3 の倍数となるのは，各位の数字の和が 3 の倍数となるとき．

数字の組合せは　(0，2，4，6)，(0，4，6，8)

(0，2，4，6) のとき　　$3\times3!=18$（個）

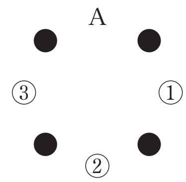
(0，4，6，8) のときも同様に 18 個．　　よって 3 の倍数は　$18\times2=\mathbf{36}$（個）

(2)　男子 4 人のうち 1 人を右の A の位置に固定すると，

①～③に男子を並べる方法が 3! 通り．

女子 3 人を● 4 カ所中 3 カ所選んで並べる方法が ${}_4P_3$ 通り

よって　$3!\times{}_4P_3=6\times24=\mathbf{144}$（通り）



(3)　左右対称となる並べ方は，真ん中が 1，その左右に 1，2，3 が 1 個ずつある場合．

右側の 1，2，3 の並べ方は $3!=6$（通り）．その各々に対し，左側の並べ方はただ 1 通り．

よって　$6\times1=\mathbf{6}$（通り）

7 桁の数を小さい順に並べるとき

左端が 1 のときは，残りの数字の並べ方が　$\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$（通り）

左端が 2 のときは，残りの数字の並べ方が　$\dfrac{6!}{3!2!}=60$（通り）

左端が 31 のときは，残りの数字の並べ方が　$\dfrac{5!}{2!2!}=30$（通り）

ここまでで $90+60+30=180$（個）

この後に 3211123，3211132，3211213，3211231 と続くので，3211231 は **184 番目**である．

第6講　場合の数(2)

(1)　Aグループは3人，Bグループは3人，Cグループは4人からなり，どの人も複数のグループには属していないとする．これら合計10人から7人を選ぶとき，各グループから少なくとも1人が選ばれる選び方は $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りである．

(2)　6人の生徒 a，b，c，d，e，f を3つの部屋P，Q，Rに入れる．各部屋は6人まで入れることができる．このとき，空室があってもよいとして，3つの部屋への生徒の入れ方は全部で $\boxed{\text{エオカ}}$ 通り，各部屋に2人ずつ入るような生徒の入れ方は全部で $\boxed{\text{キク}}$ 通り，空室ができないような生徒の入れ方は $\boxed{\text{ケコサ}}$ 通りである．

解答例

(1)　10人から7人を選ぶ選び方は　${}_{10}C_3=\dfrac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120$（通り）

各グループから1人も選ばれない場合は，7人が

AとCから選ばれる場合　${}_7C_7=1$（通り）

BとCから選ばれる場合　${}_7C_7=1$（通り）　　合計2通りである．

よって，各グループから少なくとも1人が選ばれる選び方は　$120-2=\mathbf{118}$（通り）

(2)　空室を許して3つの部屋に生徒を入れる方法は，$3^6=\mathbf{729}$（通り）

各部屋に2人ずつ入れる方法は　${}_6C_2\times{}_4C_2=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}\times\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=\mathbf{90}$（通り）

空室ができるような生徒の入れ方は以下．

6人が1室に入る場合は，全員P，全員Q，全員Rに入る場合の3通り

6人が2室に入る場合

どの2室かが ${}_3C_2=3$（通り）

その2室のいずれかに6人を入れる方法が 2^6 通りであるが，この中には

どちらかの部屋のみに入る場合の2通りが含まれている．よって　2^6-2 通り

よって　$3\times(2^6-2)=186$（通り）

以上より，空室ができないような生徒の入れ方は　$729-3-186=\mathbf{540}$（通り）

第7講　確率(1)

1から9までの数字が1つずつ書かれた9枚のカードがある．これらを3枚ずつ3つのグループに無作為に分け，それぞれのグループから最も大きい数が書かれたカードを取り出す．

(1) 取り出された3枚のカードに8が含まれる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．

(2) 取り出された3枚のカードに3が含まれる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ である．

(3) 取り出された3枚のカードの数で，最小の数が6である確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}$ である．

解答例

(1) 9枚のカードの分け方は全部で $\dfrac{{}_9C_3\times{}_6C_3}{3!}=7\cdot5\cdot4\cdot2=280$（通り）

取り出された3枚のカードに8が含まれるとき，9と8は別のグループである．

9を含むグループの残り2枚の選び方は　9，8以外の7枚から選ぶ ${}_7C_2$ 通り．

8を含むグループの残り2枚の選び方は，9を含むグループの3枚と8を除いた残りの5枚から選ぶ ${}_5C_2$ 通り．残り1つのグループは1通りに決まる．

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_7C_2\times{}_5C_2}{280}=\dfrac{21\times10}{7\cdot5\cdot4\cdot2}=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

(2) 3枚のカードに3が含まれるとき，3を含むグループのカードは1，2，3である．残り6枚を2つのグループに分ける方法は $\dfrac{{}_6C_3}{2!}=10$（通り）　　よって求める確率は $\dfrac{10}{280}=\boldsymbol{\dfrac{1}{28}}$

(3) 6が最小の数であるのは，3枚のカードの数が (i) 6，7，9　(ii) 6，8，9　のいずれか

(i)のとき，6，7，9はそれぞれ別のグループに入り，さらに8は9と同じグループに入る．

9，8が入るグループの残り1枚の選び方は ${}_5C_1=5$（通り）

残り2つのグループのカードの選び方が　${}_4C_2\times1=6$（通り）

よって　$5\times6=30$（通り）

(ii)のとき，6，8，9はそれぞれ別のグループに入り，さらに7は9または8と同じグループに入る．そのいずれの場合も，残りのカードの分け方は　${}_5C_2\times{}_3C_2=30$（通り）

よって　$30\times2=60$（通り）

以上より，求める確率は　$\dfrac{30+60}{280}=\dfrac{90}{280}=\boldsymbol{\dfrac{9}{28}}$

第８講　確率(2)

［1］ 6 枚の白紙の札を横 1 列に並べ，左から順に 1 から 6 の番号をつける．1 個のさいころを投げ，出た目の番号の札を裏返す（すでに裏だったときは表にする）という操作を繰り返す．

⑴ すべて表の状態から操作を 2 回行ったとき，裏の札が 2 枚になる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である．

⑵ すべて表の状態から操作を 3 回行ったとき，裏の札が 1 枚になる確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である．

［2］ 1 個のさいころを 4 回投げる試行において，出た目がすべて偶数で，6 の目が 1 回だけ出る確率は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}$ である．また出た目が偶数で，かつ 6 の目が少なくとも 1 回出る確率は $\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コサシス}}$ である．

解答例

［1］⑴ 2 回の試行の出目は全部で 6^2 通り．

裏の札が 2 枚になるのは，異なる 2 つの目が出るときで，${}_6C_2\times 2!={}_6P_2$（通り）

よって，求める確率は $\dfrac{{}_6P_2}{6^2}=\dfrac{6\cdot 5}{6\cdot 6}=\boldsymbol{\dfrac{5}{6}}$

⑵ 裏の札が 1 枚になるのは (i) 3 回とも同じ目が出る (ii) 2 種類の目が出る　のいずれか．

(i)のときは 6 通り　　(ii)のときは ${}_6C_2\times 2\times\dfrac{3!}{2!}=90$（通り）

よって，求める確率は $\dfrac{6+90}{6^3}=\boldsymbol{\dfrac{4}{9}}$

［2］ 6 の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$，6 以外の偶数の目が出る確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

よって，出た目がすべて偶数で 6 の目が 1 回だけ出る確率は ${}_4C_1\left(\dfrac{1}{6}\right)^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\boldsymbol{\dfrac{2}{81}}$

また，出た目が偶数で，かつ 6 の目が少なくとも 1 回出ることの余事象は，
出た目がすべて偶数である場合から，4 回とも 6 の目が出ない場合を除いた場合である．

よって，その確率は $\left(\dfrac{3}{6}\right)^4-\left(\dfrac{1}{3}\right)^4=\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{81}=\boldsymbol{\dfrac{65}{1296}}$

第9講　三角比・平面図形

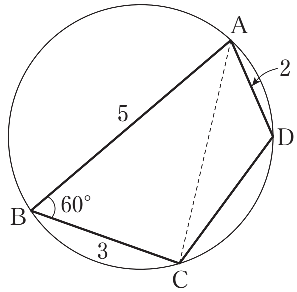
[1]　円に内接する四角形ABCDにおいて，AB＝5，BC＝3，DA＝2，∠ABC＝60°であるとき，CD＝$\boxed{\text{ア}}$，△BCD＝$\dfrac{\boxed{\text{イウエ}}\sqrt{3}}{76}$，BD＝$\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\sqrt{19}}$である．

[2]　△ABCの3辺の長さがAB＝6，BC＝5，CA＝4である．このとき

$\cos\angle B=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$である．また，∠BACの二等分線と辺BCの交点をLとすると，

BL＝$\boxed{\text{ケ}}$，AL＝$\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$である．

解答例



[1]　△ABCで余弦定理より

$AC^2=5^2+3^2-2\cdot5\cdot3\cdot\cos60^\circ=19$　　$AC=\sqrt{19}$

CD＝xとおくと，△ACDで余弦定理より

$19=x^2+2^2-2\cdot x\cdot2\cdot\cos120^\circ$

$x^2+2x-15=0$　　$x>0$より　$x=3$　　よって　CD＝**3**

∠BCD＝θとおく

△BCDで余弦定理より　$BD^2=3^2+3^2-2\cdot3\cdot3\cdot\cos\theta=18-18\cos\theta$　……①

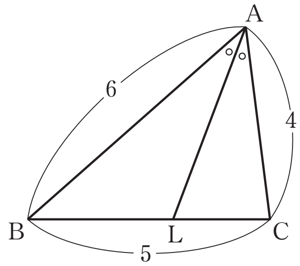
△ABDで余弦定理より　$BD^2=5^2+2^2-2\cdot5\cdot2\cdot\cos(180^\circ-\theta)=29+20\cos\theta$　……②

①，②より　$29+20\cos\theta=18-18\cos\theta$　　よって　$\cos\theta=-\dfrac{11}{38}$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{21\sqrt{3}}{38}$　　よって　$\triangle BCD=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot3\cdot\sin\theta=\dfrac{\mathbf{189}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{76}}$

①より　$BD^2=18-18\cdot\left(-\dfrac{11}{38}\right)=\dfrac{441}{19}$　　よって　$BD=\dfrac{\mathbf{21}}{\sqrt{\mathbf{19}}}$

[2]　△ABCで余弦定理より　$\cos\angle B=\dfrac{6^2+5^2-4^2}{2\cdot6\cdot5}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$



ALは∠BACの二等分線だから　BL：LC＝AB：AC＝3：2

よって　$BL=\dfrac{3}{5}\times5=\mathbf{3}$

したがって　△ABLで余弦定理より

$AL^2=6^2+3^2-2\cdot6\cdot3\cdot\cos\angle B=36+9-27=18$

$AL>0$より　$AL=\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{2}}$

第10講　命題と証明

[1]　整数を要素とする2つの集合

$A=\{-3,\ 2,\ a^2-9a+25,\ 2a+3\}$, $B=\{-2,\ a^2-4a-10,\ a^2-5a+1,\ a+6,\ 16\}$

において，$A\cap B=\{2,\ 7\}$とするとき，$\overline{A}\cap B=\{$ $\boxed{\text{アイ}}$, $\boxed{\text{ウエ}}$, $\boxed{\text{オカ}}$ $\}$である.

[2]　次の各命題の真偽を調べよ．真ならば①，偽ならば②を選べ.

(1)　aが自然数ならば$\sqrt{a}$は無理数である.

(2)　$a>0$であるとき，aが無理数ならば$\sqrt{a}$も無理数である.

[3]　自然数nは，整数mを用いて$n=3m$，$3m+1$，$3m+2$の3通りに分類される.
このことを用いて，n^2を3で割ると1余ることは，nを3で割ると1余るための何条件かを以下の①～④から選べ.

①　必要十分条件

②　必要条件であるが，十分条件ではない

③　十分条件であるが，必要条件ではない

④　必要条件でも十分条件でもない

解答例

[1]　$A\cap B=\{2,\ 7\}$より　$2a+3=7$　または　$a^2-9a+25=7$　よって　$a=2,\ 3,\ 6$

$a=2,\ 3$のときは　集合Bの要素に7が存在せず不適.

$a=6$のとき　$A=\{-3,\ 2,\ 7,\ 15\}$, $B=\{-2,\ 2,\ 7,\ 12,\ 16\}$より　$A\cap B=\{2,\ 7\}$を満たす.

よって　$\overline{A}\cap B=\{\mathbf{-2,\ 12,\ 16}\}$

[2]　(1)　$a=4$のとき　$\sqrt{a}=\sqrt{4}=2$より有理数. よって反例$a=4$が存在し,偽である（②）

(2)　命題の対偶は，$\sqrt{a}$が有理数ならばaも有理数．これを示す.

$\sqrt{a}=\dfrac{n}{m}$　（m，nは正の整数）とおくと　$a=\left(\dfrac{n}{m}\right)^2=\dfrac{n^2}{m^2}$　よってaは有理数.

したがって，対偶が真より元の命題も真（①）

[3]　命題「n^2を3で割ると1余る $\Longrightarrow$ nを3で割ると1余る」の対偶は

「nが3の倍数，または3で割ると2余るとき，n^2は3の倍数，または3で割ると2余る」

$n=3m$のとき　$n^2=(3m)^2=3\cdot3m^2$　　よってn^2は3の倍数

$n=3m+2$のとき　$n^2=(3m+2)^2=3(3m^2+4m+1)+1$　n^2は3で割ると1余る

よって反例が存在し，偽

また，$n=3m+1$のとき　$n^2=(3m+1)^2=3(3m^2+2m)+1$より　n^2は3で割ると1余る

よって，命題「nを3で割ると1余る $\Longrightarrow$ n^2を3で割ると1余る」は真

したがって，必要条件であるが十分条件ではない　（②）

第11講　式と証明・高次方程式(1)

[1]　$x^3-2x^2+7x-1=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$ が x についての恒等式であるとき，$a=$ $\boxed{\text{ア}}$，$b=$ $\boxed{\text{イ}}$，$c=$ $\boxed{\text{ウ}}$ である．

[2]　$x>0$，$y>0$ のとき，不等式 $\dfrac{k}{x+y}\leqq\dfrac{1}{x}+\dfrac{49}{y}$ が常に成り立つような k の値の最大値は $\boxed{\text{エオ}}$ である．

[3]　2乗して $7+24i$ となる複素数は　$\pm(\boxed{\text{カ}}+\boxed{\text{キ}}\,i)$ である．

解答例

[1]　$x^3-2x^2+7x-1=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$　……①　において

$x=1$ のとき　　$1-2+7-1=c$　　よって $c=\mathbf{5}$

このとき①は　$x^3-2x^2+7x-1=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+5$

変形して　$x^3-2x^2+7x-1=x^3+(a-3)x^2+(b-2a+3)x+a-b+4$

両辺の係数を比較して　$a-3=-2$，$b-2a+3=7$，$a-b+4=-1$

これらをすべて満たす a，b の値は　$a=\mathbf{1}$，$b=\mathbf{6}$

[2]　$x>0$，$y>0$ より $\dfrac{k}{x+y}\leqq\dfrac{1}{x}+\dfrac{49}{y}$ の両辺に $x+y$ を掛けると

$$k\leqq\left(\frac{1}{x}+\frac{49}{y}\right)(x+y)=1+\frac{y}{x}+\frac{49x}{y}+49=\frac{y}{x}+\frac{49x}{y}+50$$

$\dfrac{y}{x}>0$，$\dfrac{49x}{y}>0$ より相加平均と相乗平均の関係から

$$\frac{y}{x}+\frac{49x}{y}+50\geqq2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{49x}{y}}+50=2\cdot7+50=64$$

$\left(\text{等号成立は } \dfrac{y}{x}=\dfrac{49x}{y}\quad x=\dfrac{1}{7}y \text{ のとき}\right)$

よって条件を満たす k の最大値は　$k=\mathbf{64}$

[3]　求める複素数を $z=a+bi$（a，b は実数）とおく．

$(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$　より

$z^2=7+24i$ から　$a^2-b^2=7$　……①　　$2ab=24$　……②

②より　$b=\dfrac{12}{a}$　これを①に代入して

$$a^2-\left(\frac{12}{a}\right)^2=7\qquad a^4-7a^2-144=0\qquad (a^2+9)(a^2-16)=0$$

a は実数より　$a^2=16$　　$a=\pm4$　このとき $b=\pm3$（複号同順）

したがって求める複素数は　$\pm(\mathbf{4}+\mathbf{3}i)$

第 12 講　高次方程式(2)

［1］ i を虚数単位とする．$x=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}\,i}$ のとき，$3x^3+4x^2+3x-1$ の値は

$\boxed{アイ}+\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}\,i$ である．

［2］ 4 次方程式 $x^4+ax^3+14x^2+16x+b=0$ ……① が $x=-2$ を 2 重解にもつとき，

$a=\boxed{オ}$，$b=\boxed{カ}$ である．

［3］ 3 次方程式 $x^3-2x^2+3x-6=0$ の実数解を α，虚数解を β，γ とするとき，

$\alpha=\boxed{キ}$ であり，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\boxed{クケ}$ である．

解答例

［1］ $x=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}\,i}=\dfrac{1+\sqrt{2}\,i}{(1-\sqrt{2}\,i)(1+\sqrt{2}\,i)}=\dfrac{1+\sqrt{2}\,i}{3}$ 　より　$3x-1=\sqrt{2}\,i$

$(3x-1)^2=(\sqrt{2}\,i)^2$ 　　$9x^2-6x+1=-2$ 　よって　$3x^2-2x+1=0$

$3x^3+4x^2+3x-1=(3x^2-2x+1)(x+2)+6x-3$

$x=\dfrac{1+\sqrt{2}\,i}{3}$ のとき　$3x^3+4x^2+3x-1=6x-3=6\cdot\dfrac{1+\sqrt{2}\,i}{3}-3=\mathbf{-1+2\sqrt{2}}\,i$

［2］ $x^4+ax^3+14x^2+16x+b=(x+2)\{x^3+(a-2)x^2+(-2a+18)x+4a-20\}-8a+b+40$

方程式①が $x=-2$ を解にもつので，$-8a+b+40=0$ ……②

さらに①が $x=-2$ を 2 重解にもつので

$x^3+(a-2)x^2+(-2a+18)x+4a-20=0$ が $x=-2$ を解にもつ．

$x^3+(a-2)x^2+(-2a+18)x+4a-20=(x+2)\{x^2+(a-4)x-4a+26\}+12a-72$ より

$12a-72=0$ 　よって　$a=\mathbf{6}$ 　　　このとき②より　$b=\mathbf{8}$

［3］ $x^3-2x^2+3x-6=0$ より　$(x-2)(x^2+3)=0$ ……①

よって実数解 α は　$\alpha=\mathbf{2}$

また，$x^3-2x^2+3x-6=0$ の 3 つの解が α，β，γ であることから，3 次方程式の解と係数の関係より $\alpha+\beta+\gamma=2$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$

よって　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=2^2-2\cdot3=\mathbf{-2}$

(別解)　①より　実数解 α は $\alpha=2$，$x^2+3=0$ の解が β，γ

よって　$\alpha^2=4$，$\beta^2+3=0$，$\gamma^2+3=0$

したがって　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=4-3-3=-2$

第13講　図形と方程式(1)

[1]　2直線 $2x+3y=1$，$3x+y=5$ の交点を通り，直線 $3x+2y=6$ に平行な直線の方程式は $y=-\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}x+\boxed{ウ}$ である．

[2]　直線 $(5k+3)x-(3k+5)y-10k+10=0$ が k の値によらず通る定点の座標は $(\boxed{エ},\ \boxed{オ})$ である．

[3]　3点 A$(5,\ 4)$，B$(1,\ 2)$，C$(6,\ 1)$ がある．線分 AB の垂直二等分線を表す式は $y=-\boxed{カ}x+\boxed{キ}$ である．また，3点 A，B，C を通る円の中心の座標は $\left(\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}},\ \dfrac{\boxed{サシ}}{\boxed{ス}}\right)$ である．

解答例

[1]　2直線の交点は $(2,\ -1)$　この点を通り，直線 $3x+2y=6$（傾き $-\dfrac{3}{2}$）に平行な直線の方程式は　$y=-\dfrac{3}{2}(x-2)-1$　つまり　$y=-\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}x+\mathbf{2}$

(別解)　2直線 $2x+3y=1$，$3x+y=5$ の交点を通る直線は

$(2x+3y-1)+k(3x+y-5)=0$　つまり　$(3k+2)x+(k+3)y-5k-1=0$ と表せる．

この直線の傾きが $-\dfrac{3}{2}$ より　$-\dfrac{3k+2}{k+3}=-\dfrac{3}{2}$　　$k=\dfrac{5}{3}$ のとき．

よって求める直線は　$7x+\dfrac{14}{3}y-\dfrac{28}{3}=0$　　つまり　$y=-\dfrac{3}{2}x+2$

[2]　$(5k+3)x-(3k+5)y-10k+10=0$　より　$(5x-3y-10)k+3x-5y+10=0$

この式が k の恒等式となるのは　$5x-3y-10=0$，かつ　$3x-5y+10=0$

つまり　$x=5$，$y=5$　　よって求める定点の座標は　$(\mathbf{5},\ \mathbf{5})$

[3]　直線 AB の傾きは $\dfrac{1}{2}$，線分 AB の中点は $(3,\ 3)$

よって線分 AB の垂直二等分線は　$y=-2(x-3)+3$

つまり　$y=-\mathbf{2}x+\mathbf{9}$　……①

直線 AC の傾きは -3，線分 AC の中点は $\left(\dfrac{11}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$

よって線分 AC の垂直二等分線は　$y=\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{11}{2}\right)+\dfrac{5}{2}$

つまり　$y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$　……②

3点 A，B，C を通る円の中心は，①と②の交点で，その座標は　$\left(\boldsymbol{\dfrac{25}{7}},\ \boldsymbol{\dfrac{13}{7}}\right)$

第14講　図形と方程式(2)

[1]　2点 A$(-1,\ 4)$，B$(2,\ 1)$ に対して，AP：BP＝2：1 を満たす点 P の軌跡は，点 $(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}})$ を中心とする半径 $\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ の円である．この円と直線 $y=-x+k$ が接するとき，$k=-\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}$ である．

[2]　連立不等式 $y\geqq 0$，$x+y\leqq 4$，$2x+y\leqq 6$，$y-3x\leqq 12$ を満たす領域を D とする．点 $(x,\ y)$ が領域 D にあるとき，次の問いに答えよ．

(1)　$4x-y$ の最大値は $\boxed{\text{キク}}$ である．　　(2)　$2y-x^2$ の最大値は $\boxed{\text{ケ}}$ である．

解答例

[1]　P$(x,\ y)$ とおくと，AP：BP＝2：1 より 2BP＝AP　つまり　$4\text{BP}^2=\text{AP}^2$ であることから

$4\{(x-2)^2+(y-1)^2\}=(x+1)^2+(y-4)^2$　　$x^2-6x+y^2+1=0$　　$(x-3)^2+y^2=8$

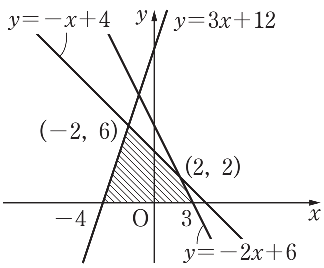
したがって点 P の軌跡は，点 **(3，0)** を中心とする，半径 $\mathbf{2\sqrt{2}}$ の円である．

この円と直線 $y=-x+k$　つまり　$x+y-k=0$ が接するとき

$\dfrac{|3+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$　　$|k-3|=4$　　$k-3=\pm 4$　　したがって　$k=\mathbf{-1,\ 7}$

[2]　$y\geqq 0$，$y\leqq -x+4$，$y\leqq -2x+6$，$y\leqq 3x+12$

を満たす領域 D は右図斜線部分．境界含む．



(1)　$4x-y=k$ とおく．$y=4x-k$（傾き 4 の直線）が領域 D と共有点をもつときの k の値の最大値を考える．

k が最大となるのは，直線 $y=4x-k$ の y 切片 $-k$ が最小となるときで，それはこの直線が $(3,\ 0)$ を通るとき．

よって　$0=4\times 3-k$　より　$k=12$

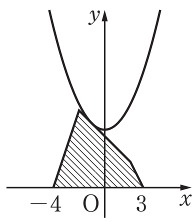
よって求める最大値は **12**

(2)　$2y-x^2=k$ とおく．$y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{k}{2}$（軸が $x=0$ の放物線）が

領域 D と共有点をもつときの k の値の最大値を考える．

k が最大となるのは，頂点の y 座標 $\dfrac{k}{2}$ が最大のときで，

それは放物線が直線 $y=-x+4$ と接するとき．



$\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{k}{2}=-x+4$　より　$x^2+2x+k-8=0$

これが重解をもつとき

$1-(k-8)=0$　$k=9$　（このとき重解 $x=-1$ をもつ）　よって求める最大値は **9**

第15講　三角関数

[1]　$\sin x+\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$\sin x\cos x=-\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，

$\sin^3 x+\cos^3 x=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である．

[2]　不等式 $\cos 2\theta+\cos\theta\leqq 0$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の解は $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}\leqq\theta\leqq\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi$ である．

[3]　関数 $y=2\cos\theta-\sin^2\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の最大値は $\boxed{\text{ク}}$，最小値は $-\boxed{\text{ケ}}$ である．

[4]　関数 $y=2\sqrt{3}\sin x\cos x+4\cos^2 x-2\sin^2 x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ は，$x=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{コサ}}}$ のとき最大値をとる．

解答例

[1]　$\sin x+\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より　$(\sin x+\cos x)^2=\dfrac{1}{2}$　　$1+2\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}$

よって　$\sin x\cos x=-\mathbf{\dfrac{1}{4}}$

$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)\right\}=\mathbf{\dfrac{5\sqrt{2}}{8}}$

[2]　$\cos 2\theta+\cos\theta\leqq 0$ より　$2\cos^2\theta-1+\cos\theta\leqq 0$

$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)\leqq 0$　　$-1\leqq\cos\theta\leqq\dfrac{1}{2}$　　よって　$\dfrac{\pi}{\mathbf{3}}\leqq\theta\leqq\dfrac{\mathbf{5}}{3}\pi$

[3]　$y=2\cos\theta-\sin^2\theta=2\cos\theta-(1-\cos^2\theta)=\cos^2\theta+2\cos\theta-1$

$\cos\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ より　$-1\leqq t\leqq 1$

このとき　$y=t^2+2t-1=(t+1)^2-2$　より

$t=1$　つまり　$\cos\theta=1$ より　$\theta=0$ のとき　最大値 **2**

$t=-1$　つまり　$\cos\theta=-1$ より　$\theta=\pi$ のとき　最小値 $-$**2**

[4]　$y=2\sqrt{3}\sin x\cos x+4\cos^2 x-2\sin^2 x$

$=2\sqrt{3}\times\dfrac{\sin 2x}{2}+4\times\dfrac{1+\cos 2x}{2}-2\times\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$=\sqrt{3}\sin 2x+3\cos 2x+1=2\sqrt{3}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+1$

$0\leqq x\leqq\pi$ より　$0\leqq 2x\leqq 2\pi$　$\dfrac{\pi}{3}\leqq 2x+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{7}{3}\pi$

よって　$2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$　つまり　$x=\dfrac{\pi}{\mathbf{12}}$ のとき y は最大値をとる．

第16講　指数関数・対数関数

[1] (1)　$2^x+2^{-x}=3$ のとき　$4^x+4^{-x}=\boxed{\text{ア}}$ である．

(2)　$x=\log_{10}\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ のとき，$(10^x+10^{-x})(10^x-10^{-x})=\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$ である．

[2] (1)　方程式 $8^x-3\cdot4^x-3\cdot2^{x+1}+8=0$ の解は　$x=\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ である．

(2)　不等式 $\log_2(x-1)-\log_{\frac{1}{2}}(x-3)<3$ の解は　$\boxed{\text{カ}}<x<\boxed{\text{キ}}$ である．

[3] (1)　$y=4^x-2^{x+2}+1$ の $-1\leqq x\leqq 3$ における最小値は $-\boxed{\text{ク}}$ である．

(2)　$f(x)=\log_2(x+7)+\log_2(1-x)$ は $x=\boxed{\text{ケコ}}$ のとき最大値をとる．

解答例

[1] (1)　$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot2^x\cdot2^{-x}=3^2-2=\mathbf{7}$

(2)　$x=\log_{10}\sqrt{7+4\sqrt{3}}$　より　$10^x=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$　　$(10^x)^2=7+4\sqrt{3}$

$(10^x+10^{-x})(10^x-10^{-x})=(10^x)^2-(10^{-x})^2=(10^x)^2-\{(10^x)^2\}^{-1}$

$=7+4\sqrt{3}-\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}}=7+4\sqrt{3}-(7-4\sqrt{3})=\mathbf{8\sqrt{3}}$

[2] (1)　$8^x-3\cdot4^x-3\cdot2^{x+1}+8=0$　より　$(2^x)^3-3\cdot(2^x)^2-3\cdot2\cdot2^x+8=0$

$2^x=X$ とおくと，$X>0$

このとき　$X^3-3X^2-6X+8=0$　　$(X-1)(X-4)(X+2)=0$

$X>0$ より　$X=1,\ 4$　　つまり　$2^x=1,\ 4$　　よって　$x=\mathbf{0,\ 2}$

(2)　真数は正より　$x-1>0,\ x-3>0$　よって $x>3$

$\log_{\frac{1}{2}}(x-3)=\dfrac{\log_2(x-3)}{\log_2\frac{1}{2}}=-\log_2(x-3)$ より

$\log_2(x-1)+\log_2(x-3)<3$　　　$\log_2(x-1)(x-3)<\log_2 8$

底2は1より大きいので　$(x-1)(x-3)<8$　　$(x-5)(x+1)<0$　　$-1<x<5$

$x>3$ より　$\mathbf{3<x<5}$

[3] (1)　$y=4^x-2^{x+2}+1=(2^x)^2-4\cdot2^x+1$　　$2^x=t$ とおくと　$-1\leqq x\leqq 3$ より $\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 8$

このとき　$y=t^2-4t+1=(t-2)^2-3$　より　$t=2$ のとき最小値 $\mathbf{-3}$ をとる．

(2)　真数条件より　$-7<x<1$

$f(x)=\log_2(x+7)+\log_2(1-x)=\log_2(x+7)(1-x)$

$=\log_2(-x^2-6x+7)=\log_2\{-(x+3)^2+16\}$　　よって $x=\mathbf{-3}$ で最大となる．

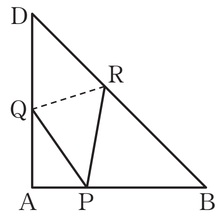
第17講　微分法

［1］　曲線 $y=x^3-5x^2+8x+11$ と直線 $y=mx+2$ が接するとき，$m=\boxed{ア}$ である．

［2］　$f(x)=x^3+ax^2+bx$ が $x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値をとる．このとき，

$\alpha+\beta=-\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}a$，$f(\alpha)+f(\beta)=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オカ}}a^3-\dfrac{2}{3}ab$ である．

［3］　AB＝AD＝1，∠BAD＝90° の直角二等辺三角形 ABD を D が線分 AB 上の点 P にくるように折り，そのときにできる折り線を QR（Q は AD 上の点，R は BD 上の点）とする．DQ の長さを x とするとき，次の問いに答えよ．



(1)　△APQ の面積を S とするとき，

$S^2=\dfrac{1}{4}(\boxed{キ}x^3-\boxed{ク}x^2+\boxed{ケ}x-1)$ である．

(2)　S の最大値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サシ}}$ である．

解答例

［1］　$y=x^3-5x^2+8x+11$　……①　より　$y'=3x^2-10x+8$

①上の点 $(t,\ t^3-5t^2+8t+11)$ における接線の方程式は

$$y=(3t^2-10t+8)(x-t)+t^3-5t^2+8t+11=(3t^2-10t+8)x-2t^3+5t^2+11$$

これが $y=mx+2$ と一致するとき　$-2t^3+5t^2+11=2$　　$(t-3)(2t^2+t+3)=0$

$$2t^2+t+3=2\left(t^2+\frac{t}{2}\right)+3=2\left\{\left(t+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right\}+3=2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{8}>0$$

t は実数より　$t=3$　　　このとき　$m=3t^2-10t+8=3\cdot3^2-10\cdot3+8=\mathbf{5}$

［2］　$f'(x)=3x^2+2ax+b=0$ の 2 解が α，β より　$\alpha+\beta=-\dfrac{\mathbf{2}a}{\mathbf{3}}$，$\alpha\beta=\dfrac{b}{3}$

$$\begin{aligned}f(\alpha)+f(\beta)&=(\alpha^3+\beta^3)+a(\alpha^2+\beta^2)+b(\alpha+\beta)\\&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+a\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+b(\alpha+\beta)\\&=\left(-\frac{2a}{3}\right)^3-3\cdot\frac{b}{3}\cdot\left(-\frac{2a}{3}\right)+a\left\{\left(-\frac{2a}{3}\right)^2-2\cdot\frac{b}{3}\right\}+b\left(-\frac{2a}{3}\right)\\&=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{27}}a^3-\frac{2}{3}ab\end{aligned}$$

[3] (1) $\mathrm{DQ}=\mathrm{QP}=x$ のとき，$\mathrm{AQ}=1-x$

$\mathrm{AP}=\sqrt{\mathrm{QP}^2-\mathrm{AQ}^2}=\sqrt{x^2-(1-x)^2}=\sqrt{2x-1}$

よって　$S^2=\left\{\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}\right\}^2=\dfrac{1}{4}(2x-1)(1-x)^2=\dfrac{1}{4}(\mathbf{2}x^3-\mathbf{5}x^2+\mathbf{4}x-1)$

(2) $f(x)=2x^3-5x^2+4x-1$ とおくと，

$f'(x)=6x^2-10x+4=2(x-1)(3x-2)$

$0<x<1$ における増減表は右図.

x	0		$\dfrac{2}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	(0)
$f(x)$	(-1)	↗	極大	↘	(0)

よって $x=\dfrac{2}{3}$ のとき $f(x)$ は最大となり，

このとき S は最大値　$\dfrac{1}{2}\sqrt{f\left(\dfrac{2}{3}\right)}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{27}}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{18}}$　をとる.

第18講　積分法

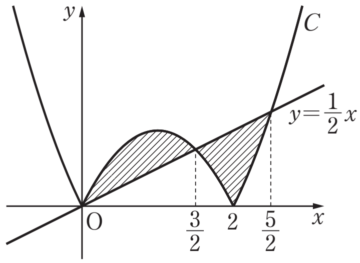
[1]　曲線 C：$y=|x^2-2x|$ と直線 l：$y=\frac{1}{2}x$ によって囲まれた面積は $\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$ である.

[2]　2つの放物線 $y=x^2-3x+2$, $y=-2x^2-x+3$ で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キク}}$ である.

解答例

[1]　$x^2-2x=\frac{1}{2}x$ より　$x(2x-5)=0$　$x=0,\ \frac{5}{2}$

$-x^2+2x=\frac{1}{2}x$ より　$x\left(x-\frac{3}{2}\right)=0$　　$x=0,\ \frac{3}{2}$



よって曲線 C と直線 l の交点の x 座標は　$x=0,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2}$

求める面積は

$$\int_0^{\frac{3}{2}}\left\{(-x^2+2x)-\frac{1}{2}x\right\}dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2}\left\{\frac{1}{2}x-(-x^2+2x)\right\}dx+\int_2^{\frac{5}{2}}\left\{\frac{1}{2}x-(x^2-2x)\right\}dx$$

$$=-\int_0^{\frac{3}{2}}x\left(x-\frac{3}{2}\right)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2}\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)dx+\int_2^{\frac{5}{2}}\left(-x^2+\frac{5}{2}x\right)dx$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}-0\right)^3+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2\right]_{\frac{3}{2}}^{2}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{4}x^2\right]_2^{\frac{5}{2}}$$

$$=\frac{9}{16}+\frac{1}{3}\left(8-\frac{27}{8}\right)-\frac{3}{4}\left(4-\frac{9}{4}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{125}{8}-8\right)+\frac{5}{4}\left(\frac{25}{4}-4\right)=\boldsymbol{\frac{17}{16}}$$

[2]　$y=x^2-3x+2$, $y=-2x^2-x+3$　より

$x^2-3x+2=-2x^2-x+3$　　$3x^2-2x-1=0$　　$(3x+1)(x-1)=0$　　$x=-\frac{1}{3},\ 1$

よって求める面積は

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{1}\{(-2x^2-x+3)-(x^2-3x+2)\}dx=\int_{-\frac{1}{3}}^{1}(-3x^2+2x+1)dx$$

$$=-\int_{-\frac{1}{3}}^{1}(3x+1)(x-1)dx$$

$$=-3\int_{-\frac{1}{3}}^{1}\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1)dx$$

$$=(-3)\cdot\left\{-\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}\right)^3\right\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{64}{27}$$

$$=\boldsymbol{\frac{32}{27}}$$

第19講　微分法・積分法

[1]　a を実数とするとき，直線 $l：y=3x-a$ と曲線 $C：y=2x^3-3x$ の共有点の個数が3個となる a の範囲は　$-\boxed{ア}<a<\boxed{イ}$ である．

[2]　$f(x)=\int_{-2}^{2}xf(t)dt+1$ を満たす関数 $f(x)$ は $f(x)=\boxed{ウ}x+\boxed{エ}$ である．

[3]　直線 l は，傾きが正で，2つの放物線 $C_1：y=x^2$，$C_2：y=4x^2+12x$ に接している．

(1)　直線 l の方程式は　$y=\boxed{オ}x-\boxed{カ}$ である．

(2)　放物線 C_1，C_2，および直線 l で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答例

[1]　C と l の共有点の x 座標は　$3x-a=2x^3-3x$　つまり　$a=-2x^3+6x$ の解である．

$f(x)=-2x^3+6x$ とすると　$f'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$

$f(x)$ の増減は右図．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-4	↗	4	↘

直線 l と曲線 C の共有点の個数が3個になるのは，

$y=f(x)$ と $y=a$ の共有点の個数が3個のときで

　$\boldsymbol{-4<a<4}$ である．

[2]　$f(x)=\int_{-2}^{2}xf(t)dt+1=x\int_{-2}^{2}f(t)dt+1$　　$\int_{-2}^{2}f(t)dt=a$ とおくと，$f(x)=ax+1$

このとき　$a=\int_{-2}^{2}(at+1)dt=\left[\frac{1}{2}at^2+t\right]_{-2}^{2}=\frac{1}{2}a(4-4)+(2+2)=4$　より　$a=4$

よって　$f(x)=\boldsymbol{4x+1}$

[3]　(1)　C_1 上の点 $(s,\ s^2)$ における接線は　$y=2s(x-s)+s^2=2sx-s^2$

C_2 上の点 $(t,\ 4t^2+12t)$ における接線は　$y=(8t+12)(x-t)+4t^2+12t$

$$=(8t+12)x-4t^2$$

この2直線の式が一致するとき　$\begin{cases}2s=8t+12\\-s^2=-4t^2\end{cases}$　$\begin{cases}s=4t+6\\s^2=4t^2\end{cases}$

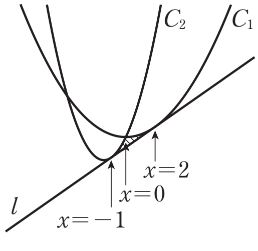
$(4t+6)^2=4t^2$　　$(t+1)(t+3)=0$　　$t=-1,\ -3$

求める直線の傾きは正より　$8t+12>0$　よって　$t=-1$　このとき　$s=2$

したがって，求める直線の方程式は　$y=\boldsymbol{4x-4}$

(2)　C_1 と C_2 の交点の x 座標は　$x^2=4x^2+12x$　より　$x(x+4)=0$　　$x=0,\ -4$

よって求める図形の面積は右図より



$$\int_{-1}^{0}\{(4x^2+12x)-(4x-4)\}dx+\int_{0}^{2}\{x^2-(4x-4)\}dx$$

$$=4\int_{-1}^{0}(x+1)^2dx+\int_{0}^{2}(x-2)^2dx$$

$$=4\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{0}^{2}=\frac{4}{3}+\frac{8}{3}=\boldsymbol{4}$$

第20講　数列(1)

[1]　初項1，公差4の等差数列 $\{a_n\}$ と，初項2，公差7の等差数列 $\{b_n\}$ に共通に含まれる項を，小さい方から順に並べてできる数列 $\{c_n\}$ の一般項は $c_n=\boxed{アイ}\,n-\boxed{ウエ}$ である．

[2]　数列1，11，111，1111，11111，…… の第 n 項は $\dfrac{\boxed{オカ}^{n}-1}{\boxed{キ}}$ である．

[3]　$a_n=n^2+3n+2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{n}{\boxed{ク}(n+\boxed{ケ})}$ である．

[4]　$S=1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3^2+4\cdot3^3+5\cdot3^4+6\cdot3^5$ とおくと，$S=\boxed{コサシス}$ である．

解答例

[1]　$\{a_n\}$：1，5，9，13，17，……

$\{b_n\}$：2，9，16，23，30，……

よって数列 $\{c_n\}$ は初項は9，公差28の等差数列より

$$c_n=9+(n-1)\cdot28=\mathbf{28}n-\mathbf{19}$$

[2]　第 n 項は　$1+10+100+1000+\cdots\cdots+10^{n-1}=\dfrac{1\cdot(10^n-1)}{10-1}=\dfrac{\mathbf{10}^n-\mathbf{1}}{\mathbf{9}}$

[3]　$a_n=(n+1)(n+2)$ より

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{n}{\mathbf{2}(n+\mathbf{2})}$$

[4]　$S=1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3^2+4\cdot3^3+5\cdot3^4+6\cdot3^5$　……①　より

$3S=1\cdot3+2\cdot3^2+3\cdot3^3+4\cdot3^4+5\cdot3^5+6\cdot3^6$　……②

①－②より

$$-2S=1\cdot1+(1\cdot3+1\cdot3^2+1\cdot3^3+1\cdot3^4+1\cdot3^5)-6\cdot3^6$$

$$=1+\frac{3(3^5-1)}{3-1}-6\cdot3^6=1+363-4374$$

$$=-4010$$

よって　$S=\mathbf{2005}$

第21講　数列(2)

[1]　$b_1=2$，$b_{n+1}-b_n=a_n$（$n=1$，2，3，……）で表される数列 $\{b_n\}$ がある．また数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2$（$n=1$，2，3，……）で定められている．このとき，

$a_n=\boxed{\text{ア}}\cdot\boxed{\text{イ}}^{n-1}-\boxed{\text{ウ}}$ であり，$b_n=\boxed{\text{エ}}^{n-1}-n+\boxed{\text{オ}}$ である．

[2]　自然数1，2，3，……を，第 n 群に $2n-1$ 個の項を含むように群に分ける．

1 | 2，3，4 | 5，6，7，8，9 | 10，11，12，13，14，15，16 | 17，18，19，……

(1)　第 n 群の最初の項は　$n^2-\boxed{\text{カ}}n+\boxed{\text{キ}}$ である．

(2)　第 n 群に含まれる数の和は　$(\boxed{\text{ク}}n-1)(n^2-n+\boxed{\text{ケ}})$ である．

(3)　365は第 $\boxed{\text{コサ}}$ 群の $\boxed{\text{シ}}$ 番目の項である．

解答例

[1]　$a_{n+1}=3a_n+2$　より　$a_{n+1}+1=3(a_n+1)$，$a_1+1=1+1=2$

よって数列 $\{a_n+1\}$ は初項2，公比3の等比数列である．

したがって　$a_n+1=2\cdot3^{n-1}$　より　$a_n=\mathbf{2\cdot3^{n-1}-1}$

また，$b_{n+1}-b_n=a_n$ より数列 $\{a_n\}$ は数列 $\{b_n\}$ の階差数列である．

$n\geqq2$ のとき　$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}a_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2\cdot3^{k-1}-1)$

$$=2+\frac{2(3^{n-1}-1)}{3-1}-(n-1)=\mathbf{3^{n-1}-n+2}\quad(n=1\text{ のときも成立})$$

[2]　(1)　もとの数列の一般項は　$a_k=k$

第 n 群の末項はもとの数列の $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$（番目）の項であるので，

第 n 群の初項はもとの数列の $(n-1)^2+1=n^2-2n+2$（番目）の項である．

よって第 n 群の初項は　$a_{n^2-2n+2}=\mathbf{n^2-2n+2}$

(2)　第 n 群の末項は　$a_{n^2}=n^2$

よって　$\dfrac{(2n-1)\{(n^2-2n+2)+n^2\}}{2}=\mathbf{(2n-1)(n^2-n+1)}$

(3)　365はもとの数列の365番目．これが第 n 群に属するとすると

$(n-1)^2<365\leqq n^2$　　$19^2=361$，$20^2=400$ より　$n=20$

第19群の末項までの項数は　$19^2=361$　　よって365は　第**20**群の**4**番目の項

第22講　平面ベクトル(1)

[1]　△ABCにおいて，AB＝1，AC＝5，BC＝$2\sqrt{5}$ のとき，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\boxed{ア}$ である．

[2]　2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$，$\vec{c}=(2,\ -2)$ について，$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{c}$ が垂直となるのは $t=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$ のときであり，平行となるのは $t=\boxed{エオ}$ のときである．

[3]　平行四辺形OABCにおいて，辺AB上に点DをAD：DB＝2：1となるようにとり，BCの中点をEとする．直線ODと直線AEの交点をFとするとき，

$\dfrac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OD}}=\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$，$\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AE}}=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である．

解答例

[1]　∠BAC＝θ とすると，$\cos\theta=\dfrac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2}{2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}=\dfrac{1+25-20}{2\cdot1\cdot5}=\dfrac{3}{5}$

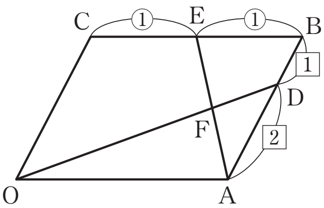
よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta=1\times5\times\dfrac{3}{5}=\mathbf{3}$

[2]　$\vec{a}+t\vec{b}=(1+2t,\ 3-t)$

$(\vec{a}+t\vec{b})\perp\vec{c}$ より　$(1+2t)\times2+(3-t)\times(-2)=0$　よって　$t=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

$(\vec{a}+t\vec{b})\parallel\vec{c}$ より　$(1+2t)\times(-2)-(3-t)\times2=0$　よって　$t=\mathbf{-4}$

[3]　点Fは線分OD上の点より，s を実数として



$\overrightarrow{OF}=s\overrightarrow{OD}=s\left(\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)=s\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}s\overrightarrow{OC}$　……①

と表せる．

また，点Fは線分AE上の点より，t を実数として

$\overrightarrow{OF}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OE}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\left(\overrightarrow{OC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)=\left(1-\dfrac{1}{2}t\right)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OC}$　……②

と表せる．

$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$ は1次独立より，①，②から　$s=1-\dfrac{1}{2}t$，$\dfrac{2}{3}s=t$　　$s=\dfrac{3}{4}$，$t=\dfrac{1}{2}$

よって　$\dfrac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OD}}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$，$\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AE}}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

第 23 講　平面ベクトル(2)

[1]　1 辺の長さが 1 の正三角形 OAB において，辺 AB を 3：1 に内分する点を P，辺 OB の中点を Q とする．直線 PQ 上の点 S を，OA⊥OS となるようにとる．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とすると，点 S は直線 PQ 上の点より

$\overrightarrow{OS}=(1-t)\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{\boxed{ア}}(1-t)\vec{a}+\left(\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ア}}-\dfrac{t}{\boxed{ア}}\right)\vec{b}$ と表される．

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OS}=\boxed{ウ}$ より $t=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ となる．このとき $|\overrightarrow{OS}|=\dfrac{\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{キ}}$ である．

[2]　半径 1 の外接円をもつ三角形 ABC の外心を O とする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく．$\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}=\vec{0}$ であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ であり，$\triangle OAB=\dfrac{\sqrt{\boxed{コサ}}}{\boxed{シ}}$ である．

解答例

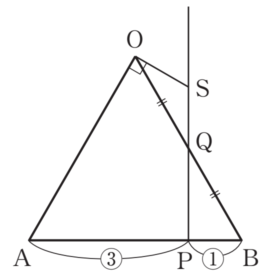
[1]　$\overrightarrow{OS}=(1-t)\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{OQ}=(1-t)\left(\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}\right)+t\cdot\dfrac{1}{2}\vec{b}=\dfrac{1}{\mathbf{4}}(1-t)\vec{a}+\left(\dfrac{\mathbf{3}}{4}-\dfrac{t}{4}\right)\vec{b}$

OA⊥OS より $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OS}=\mathbf{0}$

よって　$\vec{a}\cdot\left\{\dfrac{1}{4}(1-t)\vec{a}+\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{t}{4}\right)\vec{b}\right\}=0$　　　$\dfrac{1}{4}(1-t)|\vec{a}|^2+\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{t}{4}\right)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

ここで $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=1\times1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ より

$\dfrac{1}{4}(1-t)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{t}{4}\right)=0$　　よって　$t=\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$



このとき　$\overrightarrow{OS}=-\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}=-\dfrac{1}{6}(\vec{a}-2\vec{b})$　より

$|\overrightarrow{OS}|^2=\dfrac{1}{36}|\vec{a}-2\vec{b}|^2=\dfrac{1}{36}(|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2)=\dfrac{3}{36}$

よって　$|\overrightarrow{OS}|=\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{6}}$

[2]　$\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}=\vec{0}$ より $\vec{a}+2\vec{b}=-2\vec{c}$

よって　$|\vec{a}+2\vec{b}|=|2\vec{c}|$　つまり　$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=|2\vec{c}|^2$

$|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=4|\vec{c}|^2$　　$1+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4=4$　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1^2\cdot1^2-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1-\dfrac{1}{16}}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{15}}}{\mathbf{8}}$

第24講　空間ベクトル

[1]　四面体OABCにおいて，辺OAを3：1に内分する点をD，辺OBを2：1に内分する点をE，辺ACを2：1に内分する点をFとする．3点D，E，Fが定める平面をαとし，平面αと辺BCとの交点をGとする．kを実数として$\overrightarrow{OG}=(1-k)\overrightarrow{OB}+k\overrightarrow{OC}$ ……①　と表し，BG：GCを求める．

s，t，uを実数として$\overrightarrow{OG}=s\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OE}+u\overrightarrow{OF}$と表すと$s+t+u=\boxed{ア}$ ……②

であり，これを変形すると　$\overrightarrow{OG}=\left(\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}s+\dfrac{u}{3}\right)\overrightarrow{OA}+\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}t\overrightarrow{OB}+\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}u\overrightarrow{OC}$

……③　と表せる．①，③を比較し，②を考慮すると　BG：GC$=\boxed{カ}:\boxed{キ}$である．

[2]　空間の3点A(1，0，0)，B(0，2，0)，C(0，0，3)を通る平面をαとし，原点Oから平面αに垂線OHを下ろす．内積$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$の値は$\boxed{ク}$である．また，$s$，$t$を実数として$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$と表したとき，$s=\dfrac{\boxed{サ}}{49}$，$t=\dfrac{\boxed{シ}}{49}$であり，OHの長さは$\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$である．

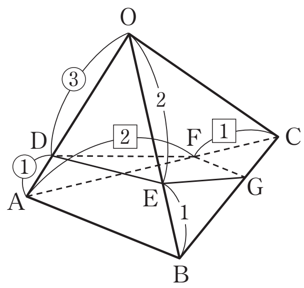
解答例

[1]　$\overrightarrow{OG}=s\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OE}+u\overrightarrow{OF}$と表すと，点Gは平面DEF上より　$s+t+u=\mathbf{1}$

$\overrightarrow{OG}=s\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OE}+u\overrightarrow{OF}$

$=s\left(\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OA}\right)+t\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right)+u\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OC}\right)$

$=\left(\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}s+\dfrac{u}{3}\right)\overrightarrow{OA}+\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}t\overrightarrow{OB}+\dfrac{2}{3}u\overrightarrow{OC}$



これと$\overrightarrow{OG}=(1-k)\overrightarrow{OB}+k\overrightarrow{OC}$より

$\dfrac{3}{4}s+\dfrac{u}{3}=0$，$\dfrac{2}{3}t=1-k$，$\dfrac{2}{3}u=k$

よって　$k=\dfrac{3}{4}$より　BG：GC$=\mathbf{3}:\mathbf{1}$である．

[2]　$\overrightarrow{AB}=(-1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,\ 0,\ 3)$より　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\mathbf{1}$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{10}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=-1$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=-1$

$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$のとき　$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$より　$(\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=0$　　$-1+5s+t=0$ ……①

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$より　$(\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=0$　　$-1+s+10t=0$ ……②

①，②より　$s=\dfrac{\mathbf{9}}{49}$，$t=\dfrac{\mathbf{4}}{49}$　　このとき　$\overrightarrow{OH}=\left(\dfrac{36}{49},\ \dfrac{18}{49},\ \dfrac{12}{49}\right)=\dfrac{6}{49}(6,\ 3,\ 2)$より

$\overrightarrow{OH}=\dfrac{6}{49}\sqrt{6^2+3^2+2^2}=\dfrac{\mathbf{6}}{\mathbf{7}}$

高３　スタンダードレベル数学ⅠAⅡBを受講する皆さんへ

ようこそ，後期講座へ。

後期講座では，まずは単元別の入試問題を扱うことで，前期講座で培った力を確認していただきます。定着が薄い単元がある場合は，前期のテキストに戻ってください。また，前期では触れることのできなかった解法も問題を通じて紹介いたします。じっくり取り組んでください。

そして最後の８講は「総合問題」と称し，融合問題にチャレンジをしてもらいます。問題のレベルが飛躍的に上がることはありませんが，様々な分野や複合的な知識を要求する入試問題を掲載しています。初めて出会う局面も含め，現状をどう切り拓いていくかをじっくり考えながら予習を行ってください。それが，入試本場でみなさんが問題を目の前にして行うべきことです。

この後期講座を一通りやれば，「問題をとらえる力」の土台があなたのものになるでしょう。そしてこの講座の受講終了が，新たな始まりです。さらなる力をつけるために，ハイレベルの講座にチャレンジするのもよいでしょう。また，入試問題集や大学の過去問を解き，解答と照らし合わせることで，数学の力の幅をさらに広げていきましょう。

前期講座でも触れましたが，「人から人へ」，それは時代がどんなに進歩しても変わることがありません。真剣に動画を視聴してください。一緒に数学の世界を少しずつ紐解いていきましょう。

さぁ，そろそろ時間です。まずはしっかりと「予習」し，自分の力を確認しておいてください。いつでも，どこでも，何度でも。『スタディサプリ』は君たちと共にあります。

山内　恵介

＜後期　目次＞

＜講座の受講の仕方＞

①　予習について

すべての講は「講義問題」3問で構成されています。まずは何も見ないで問題をノートまたはルーズリーフに解いてみましょう。問題をとらえる力がどこまで養われているかわかります。

ここでは必ずしも答案形式にこだわる必要はありません。最後まで解けないことも多いかもしれません。それでも，いろんな可能性を追ってみましょう。

ちなみに1問にかけてよい時間はおよそ15分〜20分（[1][2]に分かれている場合はそれぞれおよそ10分）です。3問でおよそ1時間。数学に本気で向き合う時間です。

②　講義について

予習をすることで自分の見るべきポイントが押さえられた状態，これが講義を受ける前に必要な準備です。それができている状態で授業を見て，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。

問題が掲載されているページは全て見開きの構成となっています。また，見開きの右側には余白（「Note」欄）がふんだんに用意されています。ここには何でも「自由」に書いて残すことができます。「自由」とはどういうことか。それは，このスペースに画面上の黒板に書かれたことを「書き写すのみ」に留まることは厳禁，ということです。授業時間は限られていますから，先生は全てを黒板に書くことはしていません。よって，授業を聞き，先生が話したことや自分なりに感じ取ったことを記しておくべきなのです。きれいにまとめても誰も見てくれませんよ。あくまで「Note」＝「記録」です。後から見て自分だけがわかる程度でよいのです。

これまでの人生で，書く速度を速くする努力をしてこなかった人へ。この講座はいつでも止めたり戻ったりできます。置いていかれそうになったら，動画を止めてゆっくり書くのもよいでしょう。けれども，「聞きながら書く」という訓練はこれからでも遅くありませんよ。この講義を通じて「聞きながら書く」ということを実践してみてください。

ただし動画を止められるからといって「考えすぎ」は逆に厳禁です。あなた方に残された時間は限られています。勉強は数学だけじゃないでしょう？　「だいたいこういうことかな」という感じで大枠をとらえた上で，細かいところは後からこだわる姿勢も時には大事ですよ。

③　復習について　その１

まずは問題によって語られた「ストーリー」を，テキストの問題を見ながらもう一度頭に描いてみましょう。もし思い出せない場面があったら「Note」欄を見てみましょう。そしてそこで描いた世界観を元に，次に自分で実際に問題を別の紙や復習用ノートに解いてみましょう。予習と異なり，ここでは計算も含め実際に丁寧に記述していきましょう。もし全然歯がたたない場合は，もう一度講座を視聴することをお勧めします。

もちろん数学という科目の特性上，あなたの技術力の不足などにより途中で止まってしまうかもしれません。また，あなたの想いをどう記述で表現してよいかわからない場合もあるかもしれません。安心してください。すべての問題に「解答例」がついています。必要に応じて参考にしてください。

講義問題の復習をこのように欠かすことなく行い，解答を自分で書き上げることができた時が，先生から得たものが自分のものになった瞬間です。こうして書き上げた答案を，テキストと一緒に保存しておきましょう。

また１回の復習で納得のいくものが書けないケースもあるかと思います。そういった場合は，時間をおいてもう一度問題を解き直すことをお勧めします。チャンスは「空き時間」「隙間時間」です。一度自分で取り組んだことは，次は確実に速度と正確性が上がります。それを実感することも成長の糧となりましょう。

④　復習について　その２

③が終わったら，新たな問題にチャレンジしたくなるでしょう。「練習問題」が各講に用意してあります。講義の問題に関連する問題もあれば，発展的な内容もあります。また問題によって難易度も様々です。

解き終えたら，「解答」を見て自分の到達具合をチェックしてみましょう。この「練習問題」もまた，みなさんの成長のために厳選した問題です。より理解を深めていただきたく思います。

以上を確実に繰り返すことにより，確実に「自分で考える」領域に近づくことができます。入試を想定すると，最終的には自分で答案を作り上げる必要があります。授業を受けるだけでは，「受けっぱなし」に終わることもあるでしょう。また，記憶とともに忘れ去られてしまうことも。それを防ぐためのこのサイクルが大切です。もちろん，授業は何度でも再生可能です。後から改めて見るとその意味がわかった，という声もよく耳にします。決して短くはないこの道のり。一日一日，一歩一歩，焦らず，確実に進んで行きましょう。

最後に。この講義と同時並行で進める日々の自主学習においては，その理解を深めるための「解説」が重要です。例えば「授業」や「解答集」がそれに当たります。とくに「詳細な解答」，つまり答えにたどり着く「プロセス」を，自分の解答と照らし合わせる作業が欠かせません。

ですから「最後の答」しかない問題集やプリントではお話になりません。「自分で考えれば必ず答えにたどり着く！」とおっしゃる先生もいますが，「知識の欠如」「時間の制約」「経験不足」「他教科とのバランス」が考慮されておらず，「自分ができる（できてきた）ことは他人もできるはず」という無責任な発言とも言えましょう。受験勉強に求められるのは，「時間対効果」です。

よい道筋を参考に，自分で切り開く時の「道標」としながら自主学習を進めて行きましょう。それが，自力で進むことができる力を養うための，効率のよい学習法なのです。

第25講　数と式・方程式・不等式(1)

$\boxed{1}$ 次の式を因数分解せよ.

(1) $(x-y)^3+(z-y)^3-(x-2y+z)^3$

(2) $4x^4+7x^2+16$

< Note >

$\boxed{2}$ [1]　$a-b=4$，$b-c=3$ のとき，$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$，
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ の値をそれぞれ求めよ．

[2]　連立方程式 $\begin{cases} 4x-3y+3z=3 \\ 3x-4y+2z=1 \\ y^2+x+z=\dfrac{11}{4} \end{cases}$ を解け．

＜ Note ＞

$\boxed{3}$ ［1］　連立方程式 $\begin{cases} x^2-2y=8 \\ y^2-2x=8 \end{cases}$ を解け.

［2］　3 つの数 x, y, z が $x<y<z$，$y>0$ および $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$, $x+1=y$, $y+1=z$ を満足するとき，次の問いに答えよ.

(1)　x の値を求めよ.

(2)　$xy(x+y)+xz(x+z)+yz(y+z)+3xyz+3(x+y+z)$ の値を求めよ.

< Note >

第 25 講　数と式・方程式・不等式(1)

［1］ $x^4+4=(x^2+\boxed{\text{ア}}x+\boxed{\text{イ}})(x^2-\boxed{\text{ア}}x+\boxed{\text{イ}})$ である．

［2］ $a+b+c=-3$，$ab+bc+ca=3$ のとき，

$\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}=\boxed{\text{ウ}}$，$\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}=\boxed{\text{エ}}$ である．

［3］ 互いに異なる定数 a，b，c が，$\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}$ を満たすとき，

$\dfrac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}$ の式の値を求めたい．$\dfrac{b+c}{a}=k$ ……① とおくと，

$k=\boxed{\text{オ}}$ または $a+b+c=\boxed{\text{カ}}$ である．$k=\boxed{\text{オ}}$ は問題に適さない．また，

$a+b+c=\boxed{\text{カ}}$ のとき，①より $k=\boxed{\text{キク}}$ である．さらに

$\dfrac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}=k^{\boxed{\text{ケ}}}$ であることから，求める式の値は $\boxed{\text{コサ}}$ であることがわかる．

< Note >

第26講　数と式・方程式・不等式(2)

1 [1]　不等式 $\dfrac{x^2-1}{x} \leqq 1$ を満たす実数 x の範囲を求めよ．

[2]　実数 x，y が $2x^2-2xy+y^2-2y-2x+5=0$ を満たすとき，x，y の値を求めよ．

＜ Note ＞

$\boxed{2}$ [1]　x についての 3 次方程式 $x^3+(a-3)x^2+(-2a+b+3)x+a-b-15=0$ の 1 つの解が $3+\sqrt{3}\,i$ であるとき，実数の定数 a，b の値，および $3+\sqrt{3}\,i$ 以外の解を求めよ．

[2]　(1)　$x+y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2$ を満たす 2 数 x，y を求めよ．

(2)　$x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3$，$xyz=1$ を満たす 3 数 x，y，z を求めよ．

< Note >

$\boxed{3}$　a，b，c は実数とし，3 次式 $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は　$p(1)=1$，$p(2)=2$，$p(3)=3$ を満たすとする．

(1)　a，b，c の値を求めよ．

(2)　$p(x)$ を $x-4$，$(x-1)(x-2)$ で割ったときの余りをそれぞれ求めよ．

< Note >

第 26 講　数と式・方程式・不等式(1)

[1]　k を実数の定数とする．x，y の連立方程式 $x+y=k$，$xy=k$ が実数解をもつとき，k のとり得る値の範囲は $k \leqq \boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}} \leqq k$ である．

[2]　実数を係数にもつ 3 次方程式 $x^3-x^2+ax+b=0$ が $1+2i$ を解にもつとき，$a=\boxed{\text{ウ}}$，$b=\boxed{\text{エ}}$ である．

[3]　実数 a，x，y，z が $x+y+z=a$，$x^2+y^2+z^2=a^2-2a+14$，$xyz=-6a+6$ を満たすとき，$xy+yz+zx=a-\boxed{\text{オ}}$ である．

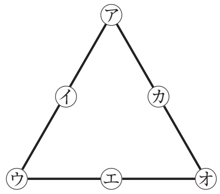
よって x，y，z は t の 3 次方程式 $t^3-at^2+(a-\boxed{\text{オ}})t+6a-6=0$ の 3 解である．

この 3 解のうち，少なくとも 2 つが等しいとき，$a=\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キク}}$ である．

< Note >

第27講　場合の数・確率(1)

1　スペードのA，2，3，4，5，6の6枚と，ハートのA，2，3，4, 5, 6の6枚の合計12枚のトランプのカードから6枚を選び，右図の正三角形の辺上の㋐㋑㋒㋓㋔㋕の位置に1枚ずつ置く．正三角形の各辺にはそれぞれ3枚のカードが置かれるが，このとき，スペードのカードが3枚並ぶ辺の数を n とする．



(1)　$n=3$ である場合の数を求めよ．

(2)　$n=2$ である場合の数を求めよ．

(3)　$n=1$ である場合の数を求めよ．

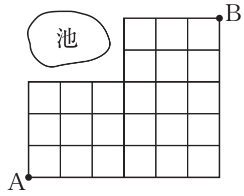
< Note >

$\boxed{2}$ ［1］　10段ある階段を登るのに1段または2段登るとする.

(1)　この10段を登りきる方法は全部で何通りあるか.

(2)　(1)のうち，7段目を踏まない登り方は何通りあるか.

［2］　右図のような街路のある町がある．地点Aから地点Bまでの最短経路は何通りあるか.



< Note >

$\boxed{3}$ 表裏が同確率で出るコインを5回投げる．

(1) 5回とも同じ面が出る確率を求めよ．

(2) 同じ面が2回以上連続して出ない確率を求めよ．

(3) 同じ面がちょうど4回連続して出ることがある確率を求めよ．

(4) 同じ面がちょうど3回連続して出ることがある確率を求めよ．

(5) 同じ面がちょうど2回連続して出ることがあるが，3回は連続して出ない確率を求めよ．

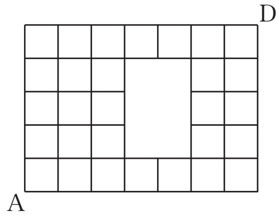
＜ Note ＞

第27講　場合の数・確率(1)

[1]　11段の階段を，一足で1段上っても2段上ってもよいとする．これ以外の上がり方は認められず，また連続して2段ずつは上れないとする．このとき，11段上る上り方は $\boxed{\text{アイ}}$ 通りある．

[2]　白5個，黒8個の碁石を一列に並べるとき，白石5個が続く並べ方は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りであり，黒石が7個以上続かないようにする並べ方は $\boxed{\text{エオカキ}}$ 通りある．

[3]　右の図のような道がある町があるとき，A地点からD地点まで行く最短経路は $\boxed{\text{クケコ}}$ 通りある．



＜ Note ＞

第 28 講　場合の数・確率(2)

1　A と B の二人が，1，2，3，4 の番号が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードをそれぞれ持っているとする．お互いが自分のカードのうちから 1 枚を選んで同時に出す．次に，手元に残された 3 枚からまた 1 枚を選んで同時に出す．これをお互いの手持ちのカードがなくなるまでくり返す．この 4 回の試行について，次の問いに答えよ．

(1)　4 回の試行のすべてで，A と B が出したカードの番号が一致する確率を求めよ．

(2)　4 回の試行のうちちょうど 2 回で，A と B が出したカードの番号が一致する確率を求めよ．

(3)　4 回の試行で，A と B が出したカードの番号が 1 回も一致しない確率を求めよ．

< Note >

$\boxed{2}$ n は 2 以上の整数とする．1 が書かれたカードが 1 枚，2 が書かれたカードが 1 枚，……，$2n+1$ が書かれたカードが 1 枚の全部で $2n+1$ 枚のカードが袋の中に入っている．この袋から 2 枚のカードを同時に取り出すとき，次の問いに答えよ．

(1) 取り出した 2 枚のカードに書かれた整数が，両方とも奇数である確率を n を用いて表せ．

(2) 取り出した 2 枚のカードに書かれた整数の和が，偶数である確率を n を用いて表せ．

(3) 取り出した 2 枚のカードに書かれた整数の和が，7 以上の奇数である確率を n を用いて表せ．

< Note >

$\boxed{3}$ さいころを投げることをくり返し，出た目の和が5以上になったら終わることにする．次の問いに答えよ．

(1) 2回投げて終わる確率を求めよ．

(2) 3回投げて終わる確率を求めよ．

＜ Note ＞

第28講　場合の数・確率(2)

[1]　a, b, c, d の本が1冊ずつある．A君とB君はこれら4冊の本を1日1冊ずつ読み，A君もB君も4冊の本すべてを読むこととする．このとき，ちょうど4日間でA君もB君もすべての本を読み終わる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．

[2]　さいころを3回投げる．このとき，偶数の目がちょうど2回出るという事象を A，4以上の目が少なくとも1回は出るという事象を B とすると，事象 $A\cap B$ の起こる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である．

[3]　n を正の整数とする．1から $(2n+1)$ までの番号を1つ書いた $(2n+1)$ 枚のカードが箱の中に入っている．この箱の中からカードを1枚取り出してもとに戻すという試行を3回行い，取り出したカードの番号の中で最大のものを X とおく．このとき $X\leqq 2$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{(2n+1)^3}$，$X=2$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{(2n+1)^3}$ である．

＜ Note ＞

第 29 講　三角比・平面図形

1　三角形 ABC において AB $=3$，BC $=\sqrt{a}$，CA $=2$，$\angle$BAC $=\theta$ とする．

(1)　$\cos\theta$ を a の式で表せ．また，a の値の範囲を求めよ．

(2)　三角形 ABC の面積が最大となるような a の値を求めよ．また，このときの外接円の半径 R と内接円の半径 r をそれぞれ求めよ．

(3)　上の(2)が成り立つとき，三角形 ABC の外接円の弧 CA 上の点 D によってできる四角形 ABCD の面積の最大値を求めよ．ただし，弧 AC 上には点 B がないものとする．

< Note >

$\boxed{2}$　1辺の長さが3の正四面体OABCにおいて，辺BCを$1:2$に内分する点をDとする．また，辺OC上に点Eをとり，$\mathrm{CE}=t$とする．

(1)　$\cos\angle\mathrm{DAE}$をtを用いて表せ．

(2)　$\triangle\mathrm{ADE}$の面積が最小になるときのtの値とそのときの面積を求めよ．

< Note >

$\boxed{3}$ 三角錐 OABC において，

$$\mathrm{AB}=2\sqrt{3},\ \ \mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{AC}=\mathrm{BC}=\sqrt{7}$$

とする．このとき，三角錐 OABC の体積を求めよ．

< Note >

第29講　三角比・平面図形

［1］　点Oを中心とする半径 a の円 C の周上に，相異なる3点A，B，Pがある．弦ABの長さを $\sqrt{3}\,a$ （$a>0$）とする．点Pが直線ABに関して点Oと同じ側にあるとき，$\angle\mathrm{APB}=\boxed{\text{アイ}}^\circ$ である．また，点Pが円 C の周上を動くとき，△PABの面積の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}a^2$ である．

［2］　AB＝AC＝AD＝3，BC＝3，CD＝2，DB＝$\sqrt{5}$ の三角錐ABCDにおいて，△BCDに外接する円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{2}$ であり，この三角錐ABCDの体積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キク}}}}{2}$ である．

< Note >

第30講　関数総合(1)

$\boxed{1}$　m を実数とする．関数 $y=|x|(x-4)-x-m$ のグラフが x 軸と異なる3点で交わるような m の値の範囲を求めよ．

＜ Note ＞

$\boxed{2}$　2次関数 $y=x^2-ax+1$ の区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における y の最大値を M，最小値を m とする．$M-m=\dfrac{1}{2}$ となる a の値を求めよ．

＜ Note ＞

$\boxed{3}$ [1]　a を実数の定数とする．2 つの関数 $f(x)=x^2-ax+3$ と
$g(x)=x^2-(2a+1)x+a^2+a$ について，次の各問いに答えよ．

(1)　すべての実数 x について，$f(x)\geqq 0$ が成り立つための条件を a を用いて表せ．

(2)　$g(x)\leqq 0$ を満たすすべての実数 x について，$f(x)>0$ が成り立つための条件を a を用いて表せ．

[2]　2 次方程式 $2x^2-2ax+a=0$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　この方程式が実数解をもつとき，少なくとも 1 つの解は 0 以上になることを示せ．

(2)　この方程式が $0\leqq x<\dfrac{2}{3}$ に少なくとも 1 つの実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ．

< Note >

第 30 講　関数総合(1)

［1］ $f(x)=x^2-2ax+a^2-2$ において，$0 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)$ の最大値と最小値の差が 20 となるような a の値は　$a=-\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．

［2］ a を定数とし，$f(x)=x^2-2x+2$，$g(x)=-x^2+ax+a$ とする．$0 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対して $f(x) \geqq g(x)$ が成り立つような a の値の範囲は
$a \leqq -\boxed{\text{オ}}+\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である．

< Note >

第 31 講　関数総合(2)

$\boxed{1}$ ［1］ $0 \leqq \theta < \pi$ のとき，方程式 $\cos 4\theta - 2\cos 3\theta + \cos 2\theta = 0$ を解け．

［2］ $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $1 + \cos\theta + \cos 2\theta > \sin\theta + \sin 2\theta$ を満たす θ の値の範囲を求めよ．

< Note >

$\boxed{2}$　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数 $y=(2\sin\theta-3\cos\theta)^2-(2\sin\theta-3\cos\theta)+1$ の最大値 M と最小値 m を求めよ．

< Note >

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=2\sin^2 x+4\sin x+3\cos 2x$ について，以下の問いに答えよ．ただし，$0\leqq x<2\pi$ である．

(1) $t=\sin x$ とするとき，$f(x)$ を t の式で表せ.

(2) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x の値をすべて求めよ．

(3) 方程式 $f(x)=a$ の相異なる解が 4 個であるような実数 a の値の範囲を求めよ．

< Note >

第31講　関数総合(2)

［1］　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数 $y=(2\cos\theta+\sin\theta)^2$ の最大値は $\boxed{\text{ア}}$，最小値は $\boxed{\text{イ}}$ である．

［2］　a の実数とする．方程式 $\sin^2 x+2a\sin x+a-4=0$　……①　が $0 \leqq x < 2\pi$ の範囲に解を1つだけもつときの a の値を求めたい．$\sin x=t$ とおくと，t のとり得る値の範囲は $-\boxed{\text{ウ}} \leqq t \leqq \boxed{\text{エ}}$ である．$-\boxed{\text{ウ}} < t < \boxed{\text{エ}}$ である t に対し，$0 \leqq x < 2\pi$ を満たす x は $\boxed{\text{オ}}$ 個存在し，$t=-\boxed{\text{ウ}}$ または $t=\boxed{\text{エ}}$ に対しては $0 \leqq x < 2\pi$ を満たす x は $\boxed{\text{カ}}$ 個存在する．

　したがって，方程式 $t^2+2at+a-4=0$ が $t=-\boxed{\text{ウ}}$ または $t=\boxed{\text{エ}}$ を解にもつときを考えると，$a=-\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ のときである．いずれの場合も，もう1解は $-\boxed{\text{ウ}} \leqq t \leqq \boxed{\text{エ}}$ になく題意を満たす．

< Note >

第 32 講　関数総合(3)

1 [1]　0 でない実数 x，y が関係式 $7^{\frac{1}{x}}=9$ および $63^{\frac{1}{y}}=3$ を満たしているとき $2x-y$ の値を求めよ.

[2]　(1)　$\dfrac{(\alpha+\beta)^3-(\alpha^3+\beta^3)}{\alpha+\beta}=\boxed{}\,\alpha\beta$ である. $\boxed{}$ にあてはまる数を答えよ.

(2)　$a=\sqrt[3]{48}+\sqrt[3]{36}$ のとき，$\dfrac{a^3-84}{a}$ の値を求めよ.

(3)　$b=\sqrt[3]{10+\sqrt{19}}+\sqrt[3]{10-\sqrt{19}}$ のとき，$\log_{81}\dfrac{b^3-20}{b}$ の値を求めよ.

＜ Note ＞

$\boxed{2}$ ［1］　a を定数とする．xy 平面上の曲線 $y=\log_2 x$ と直線 $y=x+a$ は 2 つの共有点をもつ．共有点の x 座標 x_1，x_2 が $x_2=4x_1$ を満たすように，a の値を定めよ．

［2］　a を 2 以上の定数とする．関数 $f(x)=4^x+4^{-x}-2a(2^x+2^{-x})$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$t=2^x+2^{-x}$ とおく．$t\geqq 2$ であることを示せ．

(2)　$f(x)$ の最小値と，最小値をとるときの x の値を a で表せ．

< Note >

$\boxed{3}$ 次の不等式を満たす $(x,\ y)$ の表す領域を図示せよ.

(1) $\log_2(x+y)+\log_{\frac{1}{2}}(x-y)>1$

(2) $a^{2x}-a^{2y}-a^{2x+y}+a^{x+2y}-a^x+a^y<0\quad(a>1)$

< Note >

第32講　関数総合(3)

［1］　$x=\log_{10}\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ のとき，$(10^x+10^{-x})(10^x-10^{-x})=\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ である．

［2］　t の関数 $y=\dfrac{1}{4}(4^t+4^{-t})-\dfrac{a}{2}(2^t+2^{-t}-2)+\dfrac{1}{2}$ ……①　について，$x=\dfrac{2^t+2^{-t}}{2}$ とおくとき，x の最小値は $\boxed{\text{ウ}}$ であり，①は $y=x^2-\boxed{\text{エ}}x+\boxed{\text{オ}}$ と変形できる．よって，y の最小値が 0 になるときの a の値は $a=\boxed{\text{カ}}$ である．

< Note >

第33講　関数総合(4)

$\boxed{1}$　座標平面上の原点Oを通り，x軸とのなす角が30°，傾きが正の直線と，放物線$y=x^2$との交点で，Oと異なるものをAとおく．

(1)　点Aの座標を求めよ．

(2)　線分OAを1辺とする正方形OABCをつくる．ただし，点Cは第2象限にとる．点B，Cの座標をそれぞれ求めよ．

(3)　直線OBに垂直で，放物線$y=x^2$に接する直線の方程式を求めよ．

< Note >

$\boxed{2}$ [1]　円 $C : x^2+y^2+2x-6y+k=0$ について考える．原点Oから C に引いた2本の接線が直交するとき，k の値を求めよ．

[2]　原点Oを中心とする半径3の円を C とする．点 $\mathrm{A}(5\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$ を通り円Cに接する直線で傾きが正のものを l とし，C と l の接点をPとする．

(1)　OA，AP を求めよ．

(2)　直線OAと x 軸のなす角を $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とし，$\angle\mathrm{OAP}=\beta$ とおく．$\tan\alpha$，$\tan\beta$ を求めよ．

(3)　l の傾きを求めよ．

＜ Note ＞

$\boxed{3}$　座標平面上に，2つの放物線 C_1：$y=(x-t)^2+t$，C_2：$y=-x^2+4$ がある．ただし，t は実数とする．

(1)　C_1，C_2 が異なる2点で交わるとき，t の値の範囲を求めよ．

(2)　(1)のとき，C_1 と C_2 の2つの交点を結ぶ線分の中点の軌跡を図示せよ．

< Note >

第33講　関数総合(4)

［1］　円 $x^2+y^2=4$ の外部にある点 P$(a,\ 1)$ から，この円に引いた 2 本の接線が直交するときの a の値を次のように求める．x 軸に垂直な接線は条件を満たさないことから，点 P を通る円の接線を $y=m(x-a)+1$ とおくと，円の中心と直線の距離が半径と等しいことから，m は 2 次方程式 $(a^2-\boxed{\text{ア}})m^2-\boxed{\text{イ}}am-\boxed{\text{ウ}}=0$　……①

の 2 解である．2 本の接線が直交するのは，①の 2 解の積が $\boxed{\text{エオ}}$ のときより，

$a=\pm\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ である．

［2］　放物線 $y=x^2+1$ と直線 $y=ax$ が異なる 2 点 P，Q で交わるような実数 a の値の範囲は，$a<-\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}<a$ である．線分 PQ の中点を M とすると，M は放物線 $y=\boxed{\text{ケ}}x^2$ の $x<-\boxed{\text{コ}}$，$\boxed{\text{サ}}<x$ の部分に存在する．

＜ Note ＞

第 34 講　関数総合(5)

$\boxed{1}$　曲線 $y=x^2$ を C とする．C 上の点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$ $(\alpha<0)$ における曲線 C の接線を l とする．また，この接線 l 上の点Ｐから，曲線 C に l とは異なる接線 m をひく．ただし，点Ｐの x 座標は p とし，$p>\alpha$ とする．

(1)　接線 m の曲線 C との接点Ｂの座標を求めよ．

(2)　点Ａと点Ｂを通る直線が，直線 l と垂直となるとき，点Ｐの座標を求めよ．

(3)　点Ｐを(2)で求めたものとする．このとき，点Ｐを通り，△ABP の面積を二等分する直線の方程式を求めよ．

< Note >

$\boxed{2}$ 3次関数 $f(x)$ は，次の2つの条件を満たすとする．

（条件1）　関数 $f(x)$ は $x=1$ と $x=2$ で極値をもつ．

（条件2）　整式 $f(x)$ を x^2-3x+1 で割った余りは $-x+2$ である．

(1)　$f(x)$ を求めよ．

(2)　$0 \leqq x \leqq 3$ における $|f(x)|$ の最大値を求めよ．

＜ Note ＞

$\boxed{3}$　曲線 $y=x^3-(3a+2)x^2-3a^2-4a+4$ が放物線 $y=x^2$ と相異なる3点で交わるための実数 a の値の範囲を求めよ.

< Note >

第34講　関数総合(5)

[1]　$c>0$ とする．曲線 $f(x)=x^3-x^2$ と直線 $g(x)=x-c$ が接するとき，$c=\boxed{ア}$ であり，$-2\leqq x\leqq 2$ における $|f(x)-g(x)|$ の最大値は $\boxed{イ}$ である．

[2]　2つの曲線 $y=2x^3+2p$ と $y=3px^2+12p^2x$ が異なる3つの共有点をもつような p の値の範囲は　$p<-\dfrac{\boxed{ウ}}{\sqrt{\boxed{エオ}}}$，$\dfrac{\boxed{ウ}}{\sqrt{\boxed{エオ}}}<p$ である．

< Note >

第 35 講　関数総合(6)

$\boxed{1}$ 放物線 $C：y=\dfrac{1}{2}x^2$ と直線 $l：y=mx$ について，以下の問いに答えよ．ただし m は $0<m<1$ を満たす実数である．

(1) C と l の原点以外の共有点の座標を m で表せ．

(2) C，l および直線 $x=2$ で囲まれる 2 つの図形の面積の和 S を m で表せ．

(3) S の最小値とそのときの m の値を求めよ．

< Note >

$\boxed{2}$ $b<a^2$ を満たす点 P$(a,\ b)$ から放物線 C：$y=x^2$ へ 2 本の接線 l_1，l_2 を引き，その接点をそれぞれ $(\alpha,\ \alpha^2)$，$(\beta,\ \beta^2)$ とする．ただし $\alpha<\beta$ にとる．放物線 C と 2 直線 l_1，l_2 で囲まれた部分の面積を S とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) a と b を α と β を用いてそれぞれ表せ.

(2) S を α と β を用いて表せ.

(3) 点 P が直線 $y=x-2$ 上を動くときの S の最小値と，それを与える P の座標を求めよ．

< Note >

$\boxed{3}$　曲線 $y=x^2+x+4-|3x|$ と直線 $y=mx+4$ で囲まれる部分の面積を，m の値によって場合分けして求めよ．

＜ Note ＞

第35講　関数総合(6)

［1］　点 A$(a,\ 0)$ $(a>0)$ を通り放物線 C：$y=2x^2-8$ に接する直線が2本あるとき，a の値の範囲は $a>\boxed{\text{ア}}$ である．このとき，2つの接点の x 座標を $\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ とする．

$\beta-\alpha=3$ のとき，$a=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であり，2本の接線と C で囲まれた部分の面積は

$\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である．

［2］　$f(x)=x^2-x-2|x|$ とする．$y=f(x)$ と $y=mx$ が異なる3つの共有点をもつとき，原点以外の共有点の x 座標は $x=m-\boxed{\text{カ}}$，$x=m+\boxed{\text{キ}}$ であり，$y=f(x)$ と $y=mx$ で囲まれる部分の面積 S は，$m=-\boxed{\text{ク}}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ をとる．

< Note >

第 36 講　数列

$\boxed{1}$ 等差数列 $\{a_n\}$ と等比数列 $\{b_n\}$ がある．ただし，$b_1>0$，$b_2>0$ とする．この数列の初項から第 n 項までのそれぞれの和 S_n, S'_n に対して，$c_n=\dfrac{S_n}{S'_n}$ とおくとき，$c_1=2$, $c_2=3$, $c_3=3$ を満たすとする．

(1) 等比数列 $\{b_n\}$ の公比を r とする．r の値を求めよ．

(2) S_n を a_1 と n の式で表せ.

(3) c_n を n の式で表せ.

< Note >

$\boxed{2}$ ［1］　実数 a，b を用いて $\sum_{k=5}^{10} i^k = a + bi$ と表すとき，a，b の値を求めよ．ただし i は虚数単位である．

［2］　初項 1，公差 2 の等差数列 $\{a_n\}$ に対して，数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$，$\{d_n\}$ をそれぞれ $b_n = \dfrac{2n+1}{a_n}$，$c_n = \log_3 b_n$，$d_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$ で定める．

(1)　d_n を n の式で表せ．

(2)　d_n が整数となるような n を，小さい順に m 個並べたものの和を求めよ．

< Note >

$\boxed{3}$ ［1］　2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が

$$a_1=2,\ b_1=2,\ a_{n+1}=6a_n+2b_n,\ b_{n+1}=-2a_n+2b_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定められるとき，次の問いに答えよ．

(1)　$c_n=a_n+b_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

［2］　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2a_n+n^2$ で与えられるとき，a_{n+1} を a_n を用いて表せ．また，a_n を n の式で表せ．

< Note >

第36講　数列

［1］ $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\log_5\frac{n+2}{n}=\boxed{\text{ア}}\log_5 2+\boxed{\text{イ}}\log_5 3+\boxed{\text{ウ}}\log_5 11$ である．

［2］ 数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，関係式 $S_n=2a_n-n\cdot 2^{n+1}$ が成り立つ．

(1) $a_1=\boxed{\text{エ}}$，$a_2=\boxed{\text{オカ}}$ である．

(2) a_{n+1} を a_n と n の式で表すと　$a_{n+1}=\boxed{\text{キ}}a_n+(n+\boxed{\text{ク}})\cdot\boxed{\text{ケ}}^{n+1})$ となる．

(3) $b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，$b_n=\dfrac{n(n+\boxed{\text{コ}})}{2}$ と表される．このことより，一般項 a_n は $a_n=n(n+\boxed{\text{コ}})\cdot 2^{n-\boxed{\text{サ}}}$ である．

< Note >

第 37 講　ベクトル(1)

$\boxed{1}$　$\mathrm{OA}=3,\ \mathrm{OB}=2,\ \angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ の三角形 OAB の外接円の中心を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ．

(2)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{p}$ の値を求めよ．

(3)　$\vec{p}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．

＜ Note ＞

2　三角形 ABC において，$\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=5$ とする．また，$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を G，内心を I，直線 AG と辺 BC の交点を M とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

(2)　$\angle\mathrm{A}$ の二等分線と辺 BC の交点を N とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{GI}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と平行になるときの a の値を求めよ．また，そのときの $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ．

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{GI}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と平行になるときの a の値を求めよ．また，そのときの $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ．

＜ Note ＞

$\boxed{3}$　三角形 OAB において，OA＝2，OB＝3，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$ であるとする．線分 AB を 1：3 に内分する点を P とし，直線 OP に関して点 A と対称な点を Q とする．さらに，直線 OQ と直線 AB の交点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3)　三角形 OAQ の面積を求めよ．

< Note >

第37講　ベクトル(1)

△OAB において，OA＝2，OB＝3 とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，その内積を $\vec{a}\cdot\vec{b}=t$ とおく．∠AOB の二等分線と線分 AB の交点を C とし，直線 OA に関して点 B と対称な点を D，直線 BD と OA の交点を H とする．このとき $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{t}{\boxed{\text{エ}}}\vec{a}-\vec{b}$ と表される．さらに $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となるとき，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$ であり，△OBH の面積は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である．

< Note >

第38講　ベクトル(2)

1　四面体 OABC において，

$$\angle \mathrm{AOB}=\angle \mathrm{AOC}=\frac{\pi}{2},\ \angle \mathrm{BOC}=\frac{\pi}{3},\ \mathrm{OA}=\mathrm{OB}=2,\ \mathrm{OC}=1$$

とする．3 点 A, B, C を通る平面上の点 P を考え，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\vec{p}$ は実数 s，t を用いて

$$\vec{p}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$$

と表される．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\vec{p}\cdot\vec{a}$，$\vec{p}\cdot\vec{b}$，$\vec{p}\cdot\vec{c}$ を s，t を用いて表せ．

(2)　点 P が $\angle \mathrm{AOP}=\angle \mathrm{BOP}=\angle \mathrm{COP}$ を満たすとき，s，t の値を求めよ．

(3)　(2)の条件を満たす点 P について，直線 AP と直線 BC の交点を Q，直線 BP と直線 AC の交点を R とする．BQ：QC および AR：RC を求めよ．

(4)　(2)の条件を満たす点 P について，3 つの四面体 OABP，OBCP，OCAP の体積の比を求めよ．

< Note >

$\boxed{2}$　１辺の長さが１の正方形 OABC を底面とし，OP＝AP＝BP＝CP を満たす点 P を頂点とする四角錐 POABC がある．辺 AP を１：３に内分する点を D，辺 CP の中点を E，辺 BC を $t：(1-t)$ に内分する点を Q とする．

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を用いて表せ．

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と t を用いて表せ．

(3)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の値を求めよ．

(4)　直線 PQ が平面 ODE に垂直であるとき，t の値および線分 OP の長さを求めよ．

< Note >

$\boxed{3}$ 座標空間の 2 点 A$(1,\ -2,\ -1)$，B$(4,\ 2,\ 4)$ を通る直線 l_1 上にあり，原点までの距離が 34 の点を C（C の x 座標は正とする），点 A を通り方向ベクトル $\vec{h}=(4,\ -3,\ -5)$ をもつ直線を l_2 とする．

(1) C の座標を求めよ．

(2) C と直線 l_2 を含む平面において，l_2 に関して C と対称な点 D の座標を求めよ．

＜ Note ＞

第 38 講　ベクトル(2)

1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．線分 OA を $s:(1-s)$ に内分する点を L，線分 BC の中点を M，線分 LM を $t:(1-t)$ に内分する点を P とし，$\angle\mathrm{POM}=\theta$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ とする．$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{1}{\boxed{\text{ア}}}$ である．

また，$\angle\mathrm{OPM}=\dfrac{\pi}{2}$ であるとき，直角三角形 OPM に注目すると　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である．また，$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\vec{a}=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\{t\overrightarrow{\mathrm{OM}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OL}}\}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}t+\dfrac{1}{\boxed{\text{コ}}}(1-t)s$ である．よって，s，t の関係式 $2(1-t)s=\boxed{\text{サ}}-\boxed{\text{シ}}\,t$　……①　が得られる．

同様に $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ であることから，$s\{t+2(1-t)s\}=\boxed{\text{ス}}$　……②　が得られる．

①，②より $(1-t)s=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ であり，これと①より $s=\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$，$t=\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である．

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{\boxed{\text{ト}}}\vec{a}+\dfrac{1}{\boxed{\text{ナ}}}\vec{b}+\dfrac{1}{\boxed{\text{ニ}}}\vec{c}$　が得られる．

< Note >

第39講　論証，証明

1　x，y が実数であるとき，次の文中の空欄に当てはまるものを，下の 1，2，3，4 から 1 つ選べ．

(i)「$x+y>0$ かつ $xy>0$」は，「$x>0$ かつ $y>0$」であるための $\boxed{\text{ア}}$．

(ii)「$x+y>2$ または $x+y<-2$」は，「$x>1$ かつ $y>1$」であるための $\boxed{\text{イ}}$．

(iii)「$|x|<1$ かつ $|y|<1$」は，「$xy+1>x+y$」であるための $\boxed{\text{ウ}}$．

(iv)「$y\leqq x^2$」は，「$y\leqq x$」であるための $\boxed{\text{エ}}$．

(v)「$x^2+y^2<2$」は，「$|x|+|y|<2$」であるための $\boxed{\text{オ}}$．

1．必要十分条件である
2．必要条件であるが，十分条件ではない
3．十分条件であるが，必要条件ではない
4．必要条件でも十分条件でもない

＜ Note ＞

$\boxed{2}$ (1) n は0または正の整数とする．二項定理を用いて

$${}_n\mathrm{C}_0+3\cdot{}_n\mathrm{C}_1+3^2\cdot{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+3^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n=4^n$$ を示せ．

(2) n を自然数とする．$3^n+5^n=8^n$ となるのは $n=1$ のときだけであることを示せ．

< Note >

$\boxed{3}$ [1]　a, b, c, x, y, z はすべて正の実数である.

(1)　不等式 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$ が成り立つことを証明せよ. また, 等号が成り立つときはどのようなときか.

(2)　$a^2+b^2+c^2=25$, $x^2+y^2+z^2=36$, $ax+by+cz=30$ のとき, $\dfrac{a+b+c}{x+y+z}$ の値を求めよ.

[2]　数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$, $a_2=1$, $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$　$(n=3, 4, 5, \cdots\cdots)$ で定義する. このとき, すべての正の整数 n に対して不等式 $a_n<\left(\dfrac{7}{4}\right)^n$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ.

< Note >

第39講　論証，証明

[1]　x，y は実数とする．次の空欄に当てはまるものを，下の①～④から選べ．

(1)「$x^2+y^2 \leqq 1$」は「$-1 \leqq x \leqq 1$ かつ $-1 \leqq y \leqq 1$」であるための $\boxed{\text{ア}}$

(2)「$x+y \geqq 2$」は「$x \geqq 2$ または $y \geqq 2$」であるための $\boxed{\text{イ}}$

①　必要十分条件である　　②　十分条件だが必要条件ではない

③　必要条件だが十分条件ではない　　④　必要条件でも十分条件でもない

[2]　$13=12+1$ であることを利用して，13^{13} を 12^2 で割ったときの余りを求めると $\boxed{\text{ウエ}}$ である．

[3]　a，b，c，x，y，z を実数とするとき，
不等式 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$ が成り立つ．この不等式の等号が成立するときを考えることにより，$x+y+z=1$ のときの $x^2+y^2+z^2$ の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ であることがわかる．

＜ Note ＞

第40講　整数問題

$\boxed{1}$ ［1］　等式 $xy=2x+2y+2$ を満たす整数 x，y の組，および自然数 x，y の組をそれぞれ求めよ．ただし，$x \geqq y$ とする．

［2］　(1)　k を整数とするとき，x の方程式 $x^2=k^2+12$ が整数解をもつような k の値をすべて求めよ．

(2)　x の方程式 $(2a-1)x^2+(3a+2)x+a+2=0$ が少なくとも1つの整数解をもつような整数 a の値とそのときの整数解をすべて求めよ．

< Note >

$\boxed{2}$ ［1］ $5x+3y+z=15$ を満たす自然数 x, y, z の組の個数を求めよ．

［2］ x, y を 1 以上 100 以下の整数とする．$5x-7y=1$ を満たす (x, y) の組の個数を求めよ．

< Note >

$\boxed{3}$ [1]　m を自然数とする．m^2-1 が 8 で割り切れるための必要十分条件は，m が奇数であることを示せ．

[2]　(1)　x^4+4 を因数分解せよ．

(2)　x が正の整数であるとき，x^4+4 が素数となるのは $x=1$ のときに限ることを示せ．

< Note >

第 40 講　整数問題

［1］　等式 $xy+3x-y-8=0$ を満たす自然数 x，y は $x=\boxed{\text{ア}}$，$y=\boxed{\text{イ}}$ である．

［2］　a，x を自然数とする．$x^2+x-(a^2+5)=0$ を満たす a，x の組は
$(a,\ x)=(\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}})$，$(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}})$（ただし $\boxed{\text{ウ}}<\boxed{\text{オ}}$）である．

［3］　$3x+5y=2009$ を満たす正の整数の組 $(x,\ y)$ は $\boxed{\text{キクケ}}$ 通りある．

＜ Note ＞

第41講　総合問題(1)

$\boxed{1}$ ［1］　自然数 n で，$\sqrt{n^2-n+20}$ の整数部分が n となるものは全部でいくつあるか．

［2］　実数 a，x，y，z が

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=a^2-2a+14 \\ x^3+y^3+z^3=a^3-3a^2+3a+18 \end{cases}$$

を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1)　$xy+yz+zx$ および xyz を a の式で表せ．

(2)　x，y，z のうち少なくとも2つが等しいとき，a，x，y，z を求めよ．

＜ Note ＞

$\boxed{2}$ ［1］ ⑴　$0 \leqq x \leqq 3$，$0 \leqq y \leqq 3$ のとき，x，y の関数 $P = x^2 + 3y^2 + 4x - 6y + 2$ の最大値，最小値を求めよ．また，そのときの x，y の値を示せ．

⑵　x，y の関数 $Q = x^2 - 6xy + 10y^2 - 2x + 2y + 2$ の最小値を求めよ．また，そのときの x，y の値を示せ．

［2］ 2 次方程式 $2x^2 - 2ax + a = 0$ について，以下の問いに答えよ．

⑴　この方程式が実数解をもつとき，少なくとも 1 つの解は 0 以上になることを示せ．

⑵　この方程式が $0 \leqq x < \dfrac{2}{3}$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ．

< Note >

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=\log_2(x+1)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) 0 以上の整数 k に対して，$f(x)=\dfrac{k}{2}(f(1)-f(0))$ を満たす x を k を用いて表せ．

(2) (1)で求めた x を x_k とおく．$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(x_k-x_{k-1})$ を n を用いて表せ．

< Note >

第41講　総合問題(1)

［1］　$x^2-4xy+5y^2+6x-14y+15$（x，y は実数）は，$x=-\boxed{\text{ア}}$，$y=\boxed{\text{イ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{ウ}}$ をとる．

［2］　p を実数とし，方程式 $x^3-px^2-\frac{13}{4}x+\frac{15}{8}=0$ は3つの実数解 a，b，c（$a>b>c$）をもつとする．$a+c=2b$ を満たすとき，$a=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$，$b=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$，$c=-\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$，$p=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である．

< Note >

第 42 講　総合問題(2)

1 ［1］ 1，2，3，4，5 の 5 種類の数字を，同じ数字をくり返し用いることを許して 3 桁の整数をつくるとき，各位の数字の和が 3 の倍数になる整数は何個あるか.

［2］ 無作為に 5 人選んだとき，その中に誕生月が同じ人がいる確率を求めよ．ただし，誕生月が何月なのかは，1 月から 12 月まですべて同じ確率とする.

< Note >

2 [1]　$f(x)=2x^3-3x^2-6x+4$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　多項式 $f(x)$ を x^2-x-1 で割ったときの商 $Q(x)$ と余り $R(x)$ をそれぞれ求めよ．

(2)　関数 $f(x)$ の極値と，そのときの x の値を求めよ．

[2]　(1)　関数 $y=|x^2-1|$ のグラフをかけ．

(2)　関数 $y=||x^2-1|-3|$ のグラフをかき，そのグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

＜ Note ＞

$\boxed{3}$ △OAB において，辺 OA を1：2に内分する点を P，辺 OB の長さを 1，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k$ とする．このとき，辺 OB 上の点 Q に関して，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と s を用いて表せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ を満たす点 Q が辺 OB 上（点 Q が O または B と一致する場合を含む）にただ1つ存在するような k の値の範囲を求めよ．

< Note >

第42講　総合問題(2)

［1］　4個の数字1，2，3，4を用いて4桁の整数を作る．ただし，同じ数字をくり返し用いてもよいとする．このように作った4桁の整数は全部で $\boxed{\text{アイウ}}$ 個あり，4桁の整数が3の倍数になる整数は全部で $\boxed{\text{エオ}}$ 個ある．

［2］　$f(x)=-x^3+x^2+6x+9$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$ の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{カキク}}+\boxed{\text{ケコ}}\sqrt{19}}{27}$ である．

＜ Note ＞

第43講　総合問題(3)

$\boxed{1}$　a，b を定数とし，$a\neq 0$ とする．連立1次方程式 $\begin{cases} 2x+(a-1)y=b \\ ax+a^2y=1 \end{cases}$ ……(☆)

について，次の問いに答えよ．

(1)　(☆)が2組以上の解をもつような a と b の値を求めよ．

(2)　(☆)が $x=1$，$y=2$ をただ1組の解としてもつような a と b の値を求めよ．

(3)　(☆)が $x=y$ なる解をもつための a と b の値に関する必要十分条件を求めよ．

< Note >

$\boxed{2}$ [1]　整数 x, y, z は次の連立方程式を満たす.

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=\frac{1}{xy+yz+zx} \qquad 2^{x+1}=\frac{5^{2y}}{10^{z+1}}$$

このとき, x, y, z の値を求めよ.

[2]　方程式 $(\log_4 x)^2=\log_4\dfrac{x^2}{2}$ の 2 つの解を α, β（ただし $\alpha>\beta$）とする.

(1)　積 $\alpha\beta$ の値を求めよ.

(2)　$(\log_4\alpha-\log_4\beta)^2$ の値を求めよ.

(3)　$\dfrac{\alpha}{\beta}<8$ を示せ.

< Note >

$\boxed{3}$ 座標平面上で $y=-ax+a$ $(a>0)$ で表される直線を l，$y=a^3x$ で表される直線を m とし，2直線の交点を $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ とする．$0<x<x_1$ の範囲で，直線 l 上の点B，直線 m 上の点Cが移動し，点B，Cおよび y 軸上の点D，Eを頂点とする長方形BCDEの面積を S とする．

(1) a を一定とした場合，S がとりうる最大値を a を用いて表せ．

(2) a が $a>0$ を満たしながら変化するとき，S の最大値と，そのときの a の値を求めよ．

< Note >

第 43 講　総合問題(3)

［1］　連立方程式 $\begin{cases} x-(a+6)y=1 \\ ax-8(a+1)y=-2 \end{cases}$ は $a=$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき解が存在せず，

$a=-$ $\boxed{\text{イ}}$ のとき解が無数に存在する．$a\neq$ $\boxed{\text{ア}}$ かつ $a\neq-$ $\boxed{\text{イ}}$ のときは解がただ１つ存在し，その解 $(x,\ y)$ がともに整数になるときの a の値は

$a=$ $\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ （ただし $\boxed{\text{ウ}}<\boxed{\text{エ}}$ ）である．

［2］　方程式 $12(\log_8 x)^2-28\log_8 x+3=0$ の２つの解を s，t とするとき，$st=$ $\boxed{\text{オカキ}}$ である．

＜ Note ＞

第 44 講　総合問題(4)

1　△ABC において，$a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{AC}$，$c=\mathrm{AB}$ とし，$\theta=\angle\mathrm{ACB}$ とおく．いま，$a+b=10$，$c=2\sqrt{7}$ で，△ABC の面積が $6\sqrt{3}$ であるとする．このとき，余弦定理から $c^2=(a+b)^2-\boxed{\text{ア}}\,ab(1+\cos\theta)$ となるので

$ab(1+\cos\theta)=\boxed{\text{イウ}}$ である．一方で △ABC の面積が $6\sqrt{3}$ であるから

$ab(1+\cos\theta)=\sqrt{\boxed{\text{エ}}}\,ab\sin\theta$　すなわち，$1+\cos\theta=\sqrt{\boxed{\text{エ}}}\sin\theta$ である．

この両辺を 2 乗して式を整理すれば，$1+\cos\theta=\boxed{\text{オ}}-\boxed{\text{オ}}\cos\theta$ となり，

$\cos\theta=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ と求まる．

従って　$a<b$ とすれば，$a=\boxed{\text{コ}}$，$b=\boxed{\text{サ}}$ である．また，△ABC の外接円の面積は，$\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}\pi$ となる．

＜ Note ＞

$\boxed{2}$　関数 $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+2x$ について次の問いに答えよ．

(1)　$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(2)　実数 a に対して，$a \leqq x \leqq a+2$ のときの $f(x)$ の最小値を $g(a)$ とおく．関数 $b=g(a)$ のグラフの概形を ab 平面上にかけ．

＜ Note ＞

$\boxed{3}$ [1]　不等式 $0 \leqq x \leqq 60$ と $0 \leqq y \leqq x+2$ を同時に満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ．

[2]　xy 平面上において，不等式 $0 \leqq y \leqq -x^2+n$（n は自然数）を満たす格子点（x 座標，y 座標がともに整数である点）の個数を a_n とする．自然数 s に対して，a_{s^2} を s の式で表せ．

＜ Note ＞

第 44 講　総合問題(4)

［1］　実数 a に対し，関数 $f(x)=x^3-3x$ の $a \leqq x \leqq a+1$ における最小値は

$a \leqq \dfrac{-\boxed{ア}-\sqrt{\boxed{イウ}}}{\boxed{エ}}$ のとき　$a^3-\boxed{オ}a$

$\dfrac{-\boxed{ア}-\sqrt{\boxed{イウ}}}{\boxed{エ}} \leqq a \leqq \boxed{カ}$ のとき　$a^3+\boxed{キ}a^2-\boxed{ク}$

$\boxed{カ} \leqq a \leqq \boxed{ケ}$ のとき　$\boxed{コサ}$　　　　$\boxed{ケ} \leqq a$ のとき　$a^3-\boxed{オ}a$

である．

［2］　n を自然数とするとき，$x+y \leqq n$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ は

$\dfrac{1}{\boxed{シ}}(n+1)(n+\boxed{ス})$ 個ある．

＜ Note ＞

第 45 講　総合問題(5)

$\boxed{1}$　6 つの面にそれぞれ 0，0，1，-1，i，$-i$ と書かれたさいころがある．ここで i は虚数単位である．このさいころを 3 回投げ，1 回目に出た目の値を X_1，2 回目に出た目の値を X_2，3 回目に出た目の値を X_3 とする．

(1)　積 X_1X_2 が実数となる確率を求めよ．

(2)　和 X_1+X_2 が実数となる確率を求めよ．

(3)　積 $X_1X_2X_3$ が実数となる確率を求めよ．

(4)　積 $X_1X_2X_3$ が 0 となる確率を求めよ．

< Note >

$\boxed{2}$ [1]　直線 $4x-3y=4$ と x 軸に接して，点 $(4,\ 1)$ を通る円のうち，半径が最小となる円の方程式を求めよ．

[2]　原点 O を中心とする半径 2 の円に，点 P$(4,\ 0)$ から引いた 2 つの接線の接点のうち，第 1 象限にある点を A，残りの点を B とする．直線 AB が x 軸と交わる点を C とする．C から直線 AP に引いた垂線と AP の交点を D とする．

(1)　線分 AP の長さを求めよ．

(2)　線分 CD の長さを求めよ．

(3)　3 点 P，C，D を通る円の方程式を求めよ．

＜ Note ＞

$\boxed{3}$ 自然数 m，n において，その最大公約数は 23 とする．ただし，$m<n$ とする．

(1) $n=230$ であるとき，m のとりうる値は $\boxed{\text{ア}}$ 個あり，その中で最小のものは $\boxed{\text{イ}}$，最大のものは $\boxed{\text{ウ}}$ である．m が最大のとき，m と n の最小公倍数は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(2) $mn=11109$ であるとき，m と n の最小公倍数は $\boxed{\text{オ}}$ である．

(3) $mn<7935$ であるとき，mn のとりうる値で最大のものは $\boxed{\text{カ}}$ である．

(4) $m+n=1150$ であるとき，mn のとりうる値で最大のものは $\boxed{\text{キ}}$ である．

< Note >

第45講　総合問題(5)

［1］　曲線 C：$y=x^2-1$ 上を動く点Pと直線 l：$y=x-3$ との距離が最小となるとき，その距離を求めたい．P$(t,\ t^2-1)$ とおくと，C と l の距離は

$\dfrac{1}{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}\left|-t^2+t-\boxed{\text{イ}}\right|$ ……①　と表される．ここで，点Pは直線 l の上側にあることより，①の絶対値の中は $\boxed{\text{ウ}}$ である．よって①は $t=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ をとり，これが求める距離の最小値である．

ただし $\boxed{\text{ウ}}$ は　①　正　　②　負　　③　0　から選べ．

［2］　和が756，最大公約数が84である2つの自然数のうち，ともに3桁であるものの組は $\boxed{\text{ケ}}$ 個ある．

< Note >

第46講　総合問題(6)

$\boxed{1}$　$x>0$ の範囲で関数 $f(x)$ を $f(x)=\displaystyle\int_0^2(|t^2-2xt|+xt)dt$ により定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$0<x\leqq 1$ のとき，$f(x)$ を求めよ．

(2)　x が $x>0$ の範囲を動くとき，$f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ．

(3)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=4x+k$ が異なる 2 点で交わるように，定数 k の値の範囲を定めよ．

＜ Note ＞

$\boxed{2}$ ［1］　原点をOとし，円 $x^2+y^2=1$ 上の点Pから x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点をH，線分PHを2：1に内分する点をQとし，$\angle\mathrm{POH}=\theta$ とする．ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

⑴　点Qの座標を θ で表せ．

⑵　$\angle\mathrm{QOH}=\alpha$，$\angle\mathrm{POQ}=\beta$ とおくとき，$\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を θ で表せ．

⑶　θ が変化するとき，β が最大となる θ の値を求めよ．

［2］　⑴　$\log_{10}3$ は無理数であることを示せ．

⑵　$\dfrac{6}{13}<\log_{10}3<\dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ．

⑶　3^{26} の桁数を求めよ．

< Note >

3 [1]　次の $\boxed{}$ に当てはまる整数を答えよ．

(1)　方程式 $x^2-2x-1=0$ の 2 つの解を α，β とすれば　$\alpha+\beta=\boxed{ア}$，$\alpha\beta=-\boxed{イ}$ である．

(2)　$a=\boxed{ウエ}$，$b=-\boxed{オカ}$ のとき x の整式 $P(x)=ax^5+bx^4+1$ は x^2-2x-1 で割り切れる．

[2]　実数 a，b を係数とする 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が異なる 2 つの虚数解をもつ．1 つの虚数解を α とすると，他の解は $2\alpha-4+3i$ と表すことができる．このとき，a，b の値を求めよ．ただし i は虚数単位とする．

＜ Note ＞

第 46 講　総合問題(6)

［1］　関数 $f(x)=\int_0^x (t+2-|t^2-4|)\,dt$ は，

$0 \leqq x <$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき $f(x)=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}x^3+\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}x^2-\boxed{\text{カ}}\,x$ となる．

また，$x>0$ の範囲で，$f(x)$ は $x=\boxed{\text{キ}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ をとる．

［2］　整数の組 $(p,\ q)$ のうち，実数係数の 2 次方程式 $x^2-2px+13=0$ の解の 1 つが $p+qi$ であるような組 $(p,\ q)$ は全部で $\boxed{\text{サ}}$ 個ある．ただし，i は虚数単位とする．

＜ Note ＞

第47講　総合問題(7)

$\boxed{1}$　x 軸上の点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ と y 軸上の点 $\mathrm{Q}(0,\ 2)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　線分 PQ の垂直二等分線の方程式を求めよ．

(2)　点 P が x 軸上を動くとき，線分 PQ の垂直二等分線が通過する領域を求め，図示せよ．

< Note >

$\boxed{2}$ n を 9 以上の自然数とする．袋の中に n 個の球が入っている．このうち 6 個は赤球で残りは白球である．この袋から 6 個の球を同時に取り出すとき，3 個が赤球である確率を P_n とする．

(1) P_{10} を求めよ．

(2) $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ を求めよ．

(3) P_n が最大となる n を求めよ．

＜ Note ＞

$\boxed{3}$　空間における 3 点 A$(1,\ 1,\ -1)$，B$(3,\ 2,\ 1)$，C$(-1,\ 3,\ 0)$ を通る平面を α とする．

(1)　△ABC は直角二等辺三角形であることを示せ．

(2)　原点 O から平面 α に垂線を下ろし，その交点を H とするとき，点 H の座標を求めよ．

(3)　四面体 OABC に外接する球の中心の座標を求めよ．

< Note >

第47講　総合問題(7)

[1]　xy 平面上の2点 $(t,\ t)$，$(t-1,\ 1-t)$ を通る直線 l_t の方程式は

$y=(\boxed{ア}\,t-1)x-\boxed{イ}\,t^2+\boxed{ウ}\,t$ と表される．t が実数のとき，直線 l_t の通りうる範囲は，不等式 $y \leqq \dfrac{1}{\boxed{エ}}x^2+\dfrac{1}{\boxed{オ}}$ を満たす点 $(x,\ y)$ の集合として表される．

[2]　座標空間に3点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ \sqrt{2},\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$ がある．原点 O$(0,\ 0,\ 0)$ から三角形 ABC に下ろした垂線の足 H の座標を求めたい．H$(x,\ y,\ z)$ とおくと，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CA}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{z}{\sqrt{\boxed{カ}}}\left(\sqrt{\boxed{カ}},\ 1,\ \sqrt{\boxed{カ}}\right)$ と表せる．

よって $\vec{v}=\left(\sqrt{\boxed{カ}},\ 1,\ \sqrt{\boxed{カ}}\right)$ とおくと，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{v}$　……①

と表され，$\vec{v} \perp \overrightarrow{\mathrm{CA}}$ かつ $\vec{v} \perp \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ である．また H は平面 ABC 上の点であることより

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$　……②　と表される．①と②より　$k\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

この式の両辺について $\vec{v}$ との内積をとることにより $k=\dfrac{\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}}$ である．

したがって H の座標は $\left(\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{コ}},\ \dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{コ}}\right)$ である．

< Note >

第 48 講　総合問題(8)

1　(1)　n を自然数とするとき，ある自然数 a，b を用いて

$$(2+\sqrt{3})^n=a+b\sqrt{3},\ (2-\sqrt{3})^n=a-b\sqrt{3}$$

とかけることを，数学的帰納法を使って示せ.

(2)　(1)の a と b について，$a^2-3b^2=1$ が成り立つことを示せ.

(3)　n を自然数とするとき，ある自然数 m を用いて

$$(2+\sqrt{3})^n=\sqrt{m}+\sqrt{m-1},\ (2-\sqrt{3})^n=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$$

とかけることを示せ.

< Note >

$\boxed{2}$　a を定数とし，$f(x)=8^x+8^{-x}-3a(4^x+4^{-x})+3(2^x+2^{-x})$ とする．$f(x)$ を最小にする x の値と，そのときの最小値を求めよ．

< Note >

$\boxed{3}$ 次の条件を満たしている正の整数 a，b，正の奇数 c の組 $(a,\ b,\ c)$ を考える．

$$2^a=(4b-c)(b+c)$$

(1) $b=13$ のとき，a，c の値を求めよ．

(2) $a\leqq 2013$ である組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を求めよ．

< Note >

第48講　総合問題(8)

[1]　a を定数とする．$f(x)=\left(27^x+\dfrac{1}{27^x}\right)-\dfrac{3}{2}a\left(9^x+\dfrac{1}{9^x}\right)+3\left(3^x+\dfrac{1}{3^x}\right)+1$ は

$a\leqq$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき最小値 $-\boxed{\text{イ}}\,a+\boxed{\text{ウ}}$ をとり，$a>$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき最小値

$-\dfrac{a^3}{\boxed{\text{エ}}}+\boxed{\text{オ}}\,a+\boxed{\text{カ}}$ をとる．

[2]　$p^2-q^2=24$ を満たす正の奇数の組 $(p,\ q)$ は全部で $\boxed{\text{キ}}$ 個ある．

< Note >

テキスト解答

第 25 講　数と式・方程式・不等式(1)

$\boxed{1}$　次の式を因数分解せよ．

(1)　$(x-y)^3+(z-y)^3-(x-2y+z)^3$

(2)　$4x^4+7x^2+16$

(1)　$x-y=A$，$z-y=B$ とおくと，$x-2y+z=(x-y)+(z-y)=A+B$　より

$$
\begin{aligned}
&(x-y)^3+(z-y)^3-(x-2y+z)^3\\
&=A^3+B^3-(A+B)^3\\
&=A^3+B^3-(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3)\\
&=-3A^2B-3AB^2\\
&=-3AB(A+B)\\
&=-3(x-y)(z-y)(x-y+z-y)=\boldsymbol{3(x-y)(y-z)(x-2y+z)}
\end{aligned}
$$

(2)　$x^2=X$ とおくと

$$
\begin{aligned}
4x^4+7x^2+16=4X^2+7X+16&=(2X)^2+7X+4^2\\
&=(2X)^2+16X+4^2-9X\\
&=(2X+4)^2-9X\\
&=(2x^2+4)^2-9x^2\\
&=(2x^2+4)^2-(3x)^2=\boldsymbol{(2x^2+3x+4)(2x^2-3x+4)}
\end{aligned}
$$

$\boxed{2}$ [1]　$a-b=4$，$b-c=3$ のとき，$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$，
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ の値をそれぞれ求めよ．

$a-b=4$，$b-c=3$　より　$a-c=(a-b)+(b-c)=4+3=7$

よって　$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=4^2+3^2+7^2=\mathbf{74}$

また，$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2$

$=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca$

$=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$　より

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=\frac{1}{2}\times 74=\mathbf{37}$$

2 [2]　連立方程式 $\begin{cases} 4x-3y+3z=3 \\ 3x-4y+2z=1 \\ y^2+x+z=\dfrac{11}{4} \end{cases}$ を解け.

$\begin{cases} 4x-3y+3z=3 & \cdots\cdots① \\ 3x-4y+2z=1 & \cdots\cdots② \\ y^2+x+z=\dfrac{11}{4} & \cdots\cdots③ \end{cases}$ について

①より　$4x+3z=3y+3$　……①′

②より　$3x+2z=4y+1$　……②′

①′, ②′より　$x=6y-3$　……④　$z=-7y+5$　……⑤

これらを③に代入して　$y^2+(6y-3)+(-7y+5)=\dfrac{11}{4}$

$4y^2-4y-3=0$　　$(2y-3)(2y+1)=0$　　$y=\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2}$

これと④, ⑤より　$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=\left(6,\ \dfrac{3}{2},\ -\dfrac{11}{2}\right),\ \left(-6,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{17}{2}\right)}$

3 [1]　連立方程式 $\begin{cases} x^2-2y=8 \\ y^2-2x=8 \end{cases}$ を解け.

$\begin{cases} x^2-2y=8 & \cdots\cdots① \\ y^2-2x=8 & \cdots\cdots② \end{cases}$ について

$x^2-2y=y^2-2x$　より　$x^2-y^2+2x-2y=0$

$(x-y)(x+y)+2(x-y)=0$　　$(x-y)(x+y+2)=0$

よって　$x=y,\ x+y+2=0$

(i)　$x=y$ のとき

①より　$x^2-2x=8$　　$x^2-2x-8=0$　　$(x-4)(x+2)=0$　　$x=4,\ -2$

よって　$(x,\ y)=(4,\ 4),\ (-2,\ -2)$

(ii)　$x+y+2=0$ のとき

$y=-x-2$　これを①に代入して　$x^2-2(-x-2)=8$

$x^2+2x-4=0$　　$x=-1\pm\sqrt{5}$

$x=-1+\sqrt{5}$ のとき　$y=-x-2=-(-1+\sqrt{5})-2=-1-\sqrt{5}$

$x=-1-\sqrt{5}$ のとき　$y=-x-2=-(-1-\sqrt{5})-2=-1+\sqrt{5}$

(i), (ii)より　$\boldsymbol{(x,\ y)=(4,\ 4),\ (-2,\ -2),\ (-1\pm\sqrt{5},\ -1\mp\sqrt{5})}$　　**(複号同順)**

$\boxed{3}$ [2]　3つの数 x, y, z が $x<y<z$，$y>0$ および $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$，$x+1=y$，$y+1=z$ を満足するとき，次の問いに答えよ．

(1)　x の値を求めよ．

(2)　$xy(x+y)+xz(x+z)+yz(y+z)+3xyz+3(x+y+z)$ の値を求めよ．

(1)　$x+1=y$，$y+1=z$ より　$y=x+1$，$z=y+1=(x+1)+1=x+2$

これらを $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$ に代入して

$$(3x+3)^2=x^2+(x+1)^2+(x+2)^2$$

$$3x^2+6x+2=0 \qquad x=\frac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot3\cdot2}}{6}=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{3}=-1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

このうち $y>0$ つまり $x>-1$ を満たすのは　$\boldsymbol{x=-1+\frac{\sqrt{3}}{3}}$

(2)　$x+y+z=3x+3=3\cdot\dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}+3=\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}&xy(x+y)+xz(x+z)+yz(y+z)+3xyz+3(x+y+z)\\&=xy(\sqrt{3}-z)+xz(\sqrt{3}-y)+yz(\sqrt{3}-x)+3xyz+3\sqrt{3}\\&=\sqrt{3}(xy+yz+zx)+3\sqrt{3}\end{aligned}$$

ここで　$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

題意より　$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$　より　$(2xy+2yz+2zx)=0$

$$xy+yz+zx=\frac{1}{2}\{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\}=0$$

よって求める値は　$\sqrt{3}\cdot0+3\sqrt{3}=\boldsymbol{3\sqrt{3}}$

第26講　数と式・方程式・不等式(2)

1 [1]　不等式 $\dfrac{x^2-1}{x} \leqq 1$ を満たす実数 x の範囲を求めよ．

$\dfrac{x^2-1}{x} \leqq 1$ の両辺に $x^2\ (>0)$ をかけて

$x(x^2-1) \leqq x^2$　　　$x^3-x^2-x \leqq 0$　　　$x(x^2-x-1) \leqq 0$

$x \neq 0$ より　$\boldsymbol{x \leqq \dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ 0 < x \leqq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

1 [2]　実数 x，y が $2x^2-2xy+y^2-2y-2x+5=0$ を満たすとき，x，y の値を求めよ．

$2x^2-2xy+y^2-2y-2x+5=0$ を y について整理すると

$y^2-2(x+1)y+2x^2-2x+5=0$　……①

これを y の2次方程式とみると，y は実数より判別式 $D \geqq 0$

$\dfrac{D}{4}=(x+1)^2-(2x^2-2x+5)=-x^2+4x-4 \geqq 0$

$x^2-4x+4 \leqq 0$　　　$(x-2)^2 \leqq 0$　　よって　$x=2$

このとき①より　$y^2-6y+9=0$　　$(y-3)^2=0$　　$y=3$

以上より　$\boldsymbol{x=2,\ y=3}$

2 [1]　x についての3次方程式 $x^3+(a-3)x^2+(-2a+b+3)x+a-b-15=0$ の1つの解が $3+\sqrt{3}\,i$ であるとき，実数の定数 a，b の値，および $3+\sqrt{3}\,i$ 以外の解を求めよ．

$x^3+(a-3)x^2+(-2a+b+3)x+a-b-15=0$ は，実数係数の方程式より，

$3+\sqrt{3}\,i$ が解ならば $3-\sqrt{3}\,i$ も解である．残りの解を α とすると，解と係数の関係より

$$\begin{cases}(3+\sqrt{3}\,i)+(3-\sqrt{3}\,i)+\alpha=-a+3\\(3+\sqrt{3}\,i)(3-\sqrt{3}\,i)+(3-\sqrt{3}\,i)\alpha+\alpha(3+\sqrt{3}\,i)=-2a+b+3\\(3+\sqrt{3}\,i)(3-\sqrt{3}\,i)\alpha=-a+b+15\end{cases}$$

つまり $\begin{cases}\alpha=-a-3 & \cdots\cdots① \\ 6\alpha=-2a+b-9 & \cdots\cdots② \\ 12\alpha=-a+b+15 & \cdots\cdots③\end{cases}$ である．

②－③より　$-6\alpha=-a-24$　　これと①より　$\alpha=3,\ a=-6$

このとき②より　$b=15$

以上より，$\boldsymbol{a=-6,\ b=15}$　　他の解は　$\boldsymbol{3-\sqrt{3}\,i,\ 3}$

$\boxed{2}$ [2] (1) $x+y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2$ を満たす 2 数 x，y を求めよ．

(2) $x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3$，$xyz=1$ を満たす 3 数 x，y，z を求めよ．

(1) $x+y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2$ より $\begin{cases} x+y=2 & \cdots\cdots① \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2 & \cdots\cdots② \end{cases}$

②より　$x+y=2xy$　つまり　$xy=\dfrac{1}{2}(x+y)=1$　……③

①，③より x，y は 2 次方程式 $t^2-2t+1=0$ の 2 解である．

この方程式を解くと　$t=1$　　したがって　$\boldsymbol{x=1,\ y=1}$

(2) $x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3$ より $\begin{cases} x+y+z=3 & \cdots\cdots① \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3 & \cdots\cdots② \end{cases}$

②と $xyz=1$　……③より　$xy+yz+zx=3xyz=3$　……④

①，③，④より，x，y，z は 3 次方程式 $t^3-3t^2+3t-1=0$ の 3 解である．

これを解くと　$(t-1)^3=0$　　$t=1$　　　したがって　$\boldsymbol{x=1,\ y=1,\ z=1}$

$\boxed{3}$ a，b，c は実数とし，3 次式 $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は　$p(1)=1$，$p(2)=2$，$p(3)=3$ を満たすとする．

(1) a，b，c の値を求めよ．

(2) $p(x)$ を $x-4$，$(x-1)(x-2)$ で割ったときの余りをそれぞれ求めよ．

(1) $p(1)=1$，$p(2)=2$，$p(3)=3$　より　$p(1)-1=0$，$p(2)-2=0$，$p(3)-3=0$

よって，$q(x)=p(x)-x=x^3+ax^2+(b-1)x+c$　……①　とおくと，

$q(1)=0$，$q(2)=0$，$q(3)=0$ である．

よって，$q(x)=(x-1)(x-2)(x-3)=x^3-6x^2+11x-6$　……②

①，②より　$a=-6$，$b-1=11$，$c=-6$　したがって　$\boldsymbol{a=-6,\ b=12,\ c=-6}$

(2) (1)より　$p(x)=q(x)+x=(x-1)(x-2)(x-3)+x$　……③　と表される．

$p(x)$ を $x-4$ で割ったときの余りを r とすると

$p(x)=(x-4)Q(x)+r$　より　$p(4)=r$

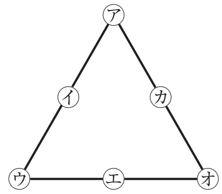
よって③より　$r=p(4)=3\cdot2\cdot1+4=10$

よって　$p(x)$ を $x-4$ で割ったときの余りは **10**

また，③より　$p(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ったときの余りは $\boldsymbol{x}$ である．

第27講　場合の数・確率(1)

1　スペードのA，2，3，4，5，6の6枚と，ハートのA，2，3，4, 5, 6の6枚の合計12枚のトランプのカードから6枚を選び，右図の正三角形の辺上の㋐㋑㋒㋓㋔㋕の位置に1枚ずつ置く．正三角形の各辺にはそれぞれ3枚のカードが置かれるが，このとき，スペードのカードが3枚並ぶ辺の数を n とする．



(1)　$n=3$ である場合の数を求めよ．

(2)　$n=2$ である場合の数を求めよ．

(3)　$n=1$ である場合の数を求めよ．

(1)　$n=3$ となるのは，㋐～㋕すべてにスペードのカードを置くとき．
よって求める場合の数は　$6!=$**720（通り）**

(2)　$n=2$ となるのは，㋑㋓㋕のいずれか1つだけにハートを置くとき．
ハートの選び方が ${}_6C_1$ 通り．それを置く場所の選び方が ${}_3C_1$ 通り
スペードの置き方が，${}_6C_5\times 5!={}_6P_5$（通り）
よって求める場合の数は，${}_6C_1\times{}_3C_1\times{}_6P_5=6\times 3\times 720=$**12960（通り）**

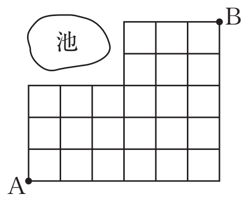
(3)　$n=1$ となるときを考える．
㋐㋑㋒にスペードが並んでいるとき，その並べ方は　${}_6P_3$ 通り
このとき，条件を満たすのは次の場合
(i)　㋓㋔㋕がすべてハートのとき　　${}_6P_3$ 通り
(ii)　㋓㋔㋕のうち2枚がハート，1枚がスペードのとき　　${}_6C_2\times{}_3C_1\times 3!$ 通り
(iii)　㋔がハート，㋓㋕がスペードのとき　　${}_6C_1\times{}_3P_2$ 通り
㋒㋓㋔，㋔㋕㋐にスペードが並ぶときも同様である．
以上より，求める場合の数は
${}_6P_3\times({}_6P_3+{}_6C_2\times{}_3C_1\times 3!+{}_6C_1\times{}_3P_2)\times 3=120\times 426\times 3=$**153360（通り）**

2 ［1］ 10 段ある階段を登るのに 1 段または 2 段登るとする．
(1) この 10 段を登りきる方法は全部で何通りあるか．
(2) (1)のうち，7 段目を踏まない登り方は何通りあるか．

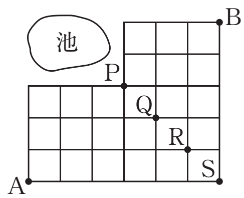
(1) 1 段登ることを A，2 段上ることを B とする．
B が起こる回数を x 回とすると，$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$
$x=0$ のとき，A が 10 回より　1 通り
$x=1$ のとき，A が 8 回，B が 1 回で　${}_9C_1$ 通り
$x=2$ のとき，A が 6 回，B が 2 回で　${}_8C_2$ 通り
$x=3$ のとき，A が 4 回，B が 3 回で　${}_7C_3$ 通り
$x=4$ のとき，A が 2 回，B が 4 回で　${}_6C_4$ 通り
$x=5$ のとき，B が 5 回より　1 通り
よって求める場合の数は
$1+{}_9C_1+{}_8C_2+{}_7C_3+{}_6C_4+1=1+9+28+35+15+1=\mathbf{89}$ **（通り）**

(2) 7 段目を踏まないのは，6 段目を踏み，次に 2 段登るときである．
6 段目を踏むまでの登り方は，(1)同様に考えて
$1+{}_5C_1+{}_4C_2+1=1+5+6+1=13$（通り）
8 段目から 10 段目までの登り方は　2 通り
よって求める場合の数は　$13\times1\times2=\mathbf{26}$ **（通り）**

2 ［2］ 右図のような街路のある町がある．地点 A から地点 B までの最短経路は何通りあるか．



A から B までの最短経路を考えたとき，右図の地点 P，Q，R，S のいずれか 1 点のみを必ず通る．



(i) P を通るとき　$\dfrac{6!}{3!3!}\times\dfrac{5!}{3!2!}=20\times10=200$（通り）

(ii) Q を通るとき　$\dfrac{6!}{4!2!}\times\dfrac{5!}{2!3!}=15\times10=150$（通り）

(iii) R を通るとき　$\dfrac{6!}{5!1!}\times\dfrac{5!}{1!4!}=6\times5=30$（通り）

(iv) S を通るとき　$1\times1=1$（通り）

以上より，求める場合の数は　$200+150+30+1=\mathbf{381}$ **（通り）**

$\boxed{3}$ 表裏が同確率で出るコインを5回投げる．

(1) 5回とも同じ面が出る確率を求めよ．

(2) 同じ面が2回以上連続して出ない確率を求めよ．

(3) 同じ面がちょうど4回連続して出ることがある確率を求めよ．

(4) 同じ面がちょうど3回連続して出ることがある確率を求めよ．

(5) 同じ面がちょうど2回連続して出ることがあるが，3回は連続して出ない確率を求めよ．

5回の面の出方は2^5通り．また表が出ることを○，裏が出ることを×と表す．

(1) 5回とも同じ面が出るのは，5回とも○，または5回とも×の2通り

よって求める確率は　$\dfrac{2}{2^5}=\mathbf{\dfrac{1}{16}}$

(2) 同じ面が2回以上連続しないのは，○と×が交互に起こるときである．

つまり ○×○×○，または ×○×○× の2通りより，求める確率は $\mathbf{\dfrac{1}{16}}$

(3) 同じ面がちょうど4回連続するのは，○が4回連続のとき ○○○○×，×○○○○ の2通り．

×が4回連続のときも同様2通り．よって求める確率は　$\dfrac{2\times2}{2^5}=\mathbf{\dfrac{1}{8}}$

(4) ○がちょうど3回連続するのは，○，×どちらでもよいときを△とすると

○○○×△ … △が○か×かで2通り

×○○○× … 1通り

△×○○○ … 2通り　　よって　$2+1+2=5$通り

したがって，求める確率は　$\dfrac{5\times2}{2^5}=\mathbf{\dfrac{5}{16}}$

(5) (i) ○がちょうど2回のみ連続し，×が1回も連続しないものは

○○×○○，○○×○×，×○○×○，○×○○×，×○×○○ の5通り

(ii) ○がちょうど2回のみ連続し，×も2回のみ連続するものは

○○××○，×○○××，○××○○，××○○× の4通り

(i)は○と×を入れ替えたものもあるので，求める確率は　$\dfrac{5\times2+4}{2^5}=\mathbf{\dfrac{7}{16}}$

(別解) (1)～(4)の余事象が，求める確率の事象である．

したがって，求める確率は　$1-\left(\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{5}{16}\right)=\dfrac{7}{16}$

第 28 講　場合の数・確率(2)

1　A と B の二人が，1，2，3，4 の番号が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードをそれぞれ持っているとする．お互いが自分のカードのうちから 1 枚を選んで同時に出す．次に，手元に残された 3 枚からまた 1 枚を選んで同時に出す．これをお互いの手持ちのカードがなくなるまでくり返す．この 4 回の試行について，次の問いに答えよ．

(1)　4 回の試行のすべてで，A と B が出したカードの番号が一致する確率を求めよ．

(2)　4 回の試行のうちちょうど 2 回で，A と B が出したカードの番号が一致する確率を求めよ．

(3)　4 回の試行で，A と B が出したカードの番号が 1 回も一致しない確率を求めよ．

4 回の試行の 2 人のカードの出し方は $4!\times 4!$ 通り

(1)　4 回の試行のすべてで 2 人のカードが一致するのは

　A のカードの出し方 $4!$ 通りだけある．

よって求める確率は　$\dfrac{4!}{4!\times 4!}=\boldsymbol{\dfrac{1}{24}}$

(2)　4 回の試行における A のカードの出し方 $4!$ 通りに対して，

　番号が一致する 2 枚のカードの選び方が ${}_4C_2$ 通り．

　残り 2 枚のカードが一致しない並べ方は 1 通り．

よって求める確率は　$\dfrac{4!\times {}_4C_2\times 1}{4!\times 4!}=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

(3)　A が $1\to 2\to 3\to 4$ の順に出したとする．

これに対して，番号が 1 回も一致しない B の出し方は

B が 1 回目に 2 を出した場合，

$2\to 1\to 4\to 3$,　　$2\to 3\to 4\to 1$,　　$2\to 4\to 1\to 3$

の 3 通り．

1 回目に 3，4 を出した場合も同様であり，また A の出し方によらず同様である．

よって求める確率は　$\dfrac{4!\times 3\times 3}{4!\times 4!}=\boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$

(別解)　A の出し方に対し，1 回のみ一致する B のカードの出し方は 4×2 通りで，

その確率は　$\dfrac{4!\times 4\times 2}{4!\times 4!}=\dfrac{1}{3}$

この確率および(1)，(2)の確率の余事象が，求める確率の事象である．

したがって，求める確率は　$1-\left(\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{3}{8}$

$\boxed{2}$ n は 2 以上の整数とする．1 が書かれたカードが 1 枚，2 が書かれたカードが 1 枚，……，$2n+1$ が書かれたカードが 1 枚の全部で $2n+1$ 枚のカードが袋の中に入っている．この袋から 2 枚のカードを同時に取り出すとき，次の問いに答えよ．

(1) 取り出した 2 枚のカードに書かれた整数が，両方とも奇数である確率を n を用いて表せ．

(2) 取り出した 2 枚のカードに書かれた整数の和が，偶数である確率を n を用いて表せ．

(3) 取り出した 2 枚のカードに書かれた整数の和が，7 以上の奇数である確率を n を用いて表せ．

$2n+1$ 枚のカードのうち，奇数は $n+1$ 枚，偶数は n 枚ある．

(1) 求める確率は $\dfrac{{}_{n+1}\mathrm{C}_2}{{}_{2n+1}\mathrm{C}_2}=\dfrac{\dfrac{(n+1)\cdot n}{2\cdot 1}}{\dfrac{(2n+1)\cdot 2n}{2\cdot 1}}=\boldsymbol{\dfrac{n+1}{2(2n+1)}}$

(2) 2 枚のカードの和が偶数になるのは，両方とも偶数，または両方とも奇数のときである．

両方とも偶数である確率は $\dfrac{{}_{n}\mathrm{C}_2}{{}_{2n+1}\mathrm{C}_2}=\dfrac{\dfrac{n(n-1)}{2\cdot 1}}{\dfrac{(2n+1)\cdot 2n}{2\cdot 1}}=\dfrac{n-1}{2(2n+1)}$

よって求める確率は $\dfrac{n+1}{2(2n+1)}+\dfrac{n-1}{2(2n+1)}=\boldsymbol{\dfrac{n}{2n+1}}$

(3) 2 枚のカードの和が奇数になる確率は，(2)より

$$1-\frac{n}{2n+1}=\frac{n+1}{2n+1}$$

2 枚のカードの和が 7 未満の奇数になるのは，次のとき

(i) 和が 3 のとき　　(ii) 和が 5 のとき

(i)のとき　2 枚のカードが 1 と 2 の 1 通りのみ

(ii)のとき　2 枚のカードが 4 と 1，3 と 2 の 2 通り

よって 2 枚のカードの和が 7 未満の奇数になる確率は $\dfrac{3}{{}_{2n+1}\mathrm{C}_2}=\dfrac{3}{n(2n+1)}$

したがって，2 枚のカードが 7 以上の奇数である確率は

$$\frac{n+1}{2n+1}-\frac{3}{n(2n+1)}=\frac{n(n+1)-3}{n(2n+1)}=\boldsymbol{\frac{n^2+n-3}{n(2n+1)}}$$

$\boxed{3}$ さいころを投げることをくり返し，出た目の和が5以上になったら終わることにする．次の問いに答えよ．

(1) 2回投げて終わる確率を求めよ．

(2) 3回投げて終わる確率を求めよ．

(1) 2回投げて終わるのは

1回目の出目が1のとき，2回目の出目が4〜6

1回目の出目が2のとき，2回目の出目が3〜6

1回目の出目が3のとき，2回目の出目が2〜6

1回目の出目が4のとき，2回目の出目が1〜6

よって，2回投げて終わる確率は

$$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{6}{6}=\frac{1}{6}\left(\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}+\frac{6}{6}\right)=\frac{1}{6}\times\frac{18}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(別解) 2回投げても終わらないのは，

(1回目の出目，2回目の出目)＝(1，1)，(1，2)，(1，3)，(2，1)，(2，2)，(3，1)

の6通りで，その確率は　$\dfrac{6}{6^2}=\dfrac{1}{6}$

よって，2回以下で終わる確率は　$1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

また，1回投げて終わるのは，その出目が5または6のときで，その確率は

$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

よって，2回投げて終わる確率は　$\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}$

(2) 3回投げても終わらないのは，

(1回目の出目，2回目の出目，3回目の出目)

＝(1，1，1)，(1，1，2)，(1，2，1)，(2，1，1)

の4通りである．よって，3回以下で終わる確率は　$1-\dfrac{4}{6^3}=\dfrac{53}{54}$

また，2回以下で終わる確率は，(1)の(別解)より　$\dfrac{5}{6}$

よって，3回投げて終わる確率は　$\dfrac{53}{54}-\dfrac{5}{6}=\boldsymbol{\dfrac{4}{27}}$

第29講　三角比・平面図形

1　三角形 ABC において AB＝3，BC＝$\sqrt{a}$，CA＝2，∠BAC＝θ とする．

(1)　$\cos\theta$ を a の式で表せ．また，a の値の範囲を求めよ．

(2)　三角形 ABC の面積が最大となるような a の値を求めよ．また，このときの外接円の半径 R と内接円の半径 r をそれぞれ求めよ．

(3)　上の(2)が成り立つとき，三角形 ABC の外接円の弧 CA 上の点 D によってできる四角形 ABCD の面積の最大値を求めよ．ただし，弧 AC 上には点 B がないものとする．

(1)　余弦定理より

$$\boldsymbol{\cos\theta}=\frac{3^2+2^2-(\sqrt{a})^2}{2\cdot3\cdot2}=\boldsymbol{\frac{13-a}{12}}$$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より　$-1<\cos\theta<1$

よって　$-1<\dfrac{13-a}{12}<1$　より　$-12<13-a<12$　　ゆえに　$\boldsymbol{1<a<25}$

(2)　三角形の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\sin\theta=3\sin\theta$$

これが最大となるのは　$\sin\theta=1$　つまり　$\theta=90^\circ$ のとき

このとき　$\cos\theta=0$　より　$\dfrac{13-a}{12}=0$　よって　$\boldsymbol{a=13}$

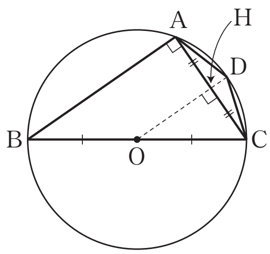
またこのとき，△ABC は辺 BC を斜辺とする直角三角形となり，

△ABC の外接円の直径は辺 BC となる．よって　$\boldsymbol{R}=\dfrac{\mathrm{BC}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{13}}{2}}$

また，$S=\dfrac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$　より　$3=\dfrac{1}{2}r(3+\sqrt{13}+2)$

よって　$\boldsymbol{r}=\dfrac{6}{5+\sqrt{13}}=\dfrac{6(5-\sqrt{13})}{25-13}=\boldsymbol{\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}}$

(3)　△ABC の面積は一定値 3 であることより，四角形 ABCD の面積が最大となるのは △ACD の面積が最大となるときである．それは，△ACD の外接円（(2)の外接円に一致）の中心を O とすると，線分 DO が弦 AC の垂直二等分線となるときである．DO と AC の交点を H とすると，



DH＝DO－HO

中点連結定理より　$\mathrm{HO}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}=\dfrac{3}{2}$

$$\mathrm{DH}=\mathrm{DO}-\mathrm{HO}=R-\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{13}-3}{2}$$

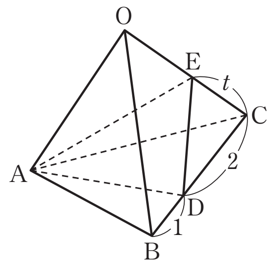
よって四角形 ABCD の面積の最大値は

$$3+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{DH}=3+\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{\sqrt{13}-3}{2}=\boldsymbol{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}$$

2　1辺の長さが3の正四面体OABCにおいて，辺BCを1：2に内分する点をDとする．また，辺OC上に点Eをとり，CE$=t$とする．

(1)　cos∠DAEをtを用いて表せ．

(2)　△ADEの面積が最小になるときのtの値とそのときの面積を求めよ．



(1)　△ABDで余弦定理より

$$AD^2=3^2+1^2-2\cdot3\cdot1\cdot\cos60^\circ=9+1-2\cdot3\cdot1\cdot\frac{1}{2}=7$$

$$AD=\sqrt{7}$$

△ACEで余弦定理より

$$AE^2=3^2+t^2-2\cdot3\cdot t\cdot\cos60^\circ=9+t^2-2\cdot3\cdot t\cdot\frac{1}{2}=t^2-3t+9$$

$$AE=\sqrt{t^2-3t+9}$$

△CDEで余弦定理より

$$DE^2=2^2+t^2-2\cdot2\cdot t\cdot\cos60^\circ=4+t^2-2\cdot2\cdot t\cdot\frac{1}{2}=t^2-2t+4$$

$$DE=\sqrt{t^2-2t+4}$$

よって，△ADEで余弦定理より

$$\cos\angle DAE=\frac{7+(t^2-3t+9)-(t^2-2t+4)}{2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{t^2-3t+9}}=\boldsymbol{\frac{12-t}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}}}$$

(2)　$$\sin^2\angle DAE=1-\frac{(12-t)^2}{28(t^2-3t+9)}=\frac{28(t^2-3t+9)-(12-t)^2}{28(t^2-3t+9)}=\frac{27t^2-60t+108}{28(t^2-3t+9)}$$

$$\sin\angle DAE=\frac{\sqrt{27t^2-60t+108}}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}}$$

よって　$\triangle ADE=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AE\cdot\sin\angle DAE$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{t^2-3t+9}\cdot\frac{\sqrt{27t^2-60t+108}}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{27t^2-60t+108}$$

$27t^2-60t+108=27\left(t-\frac{10}{9}\right)^2+\frac{224}{3}$　$(0\leqq t\leqq3)$より，

△ADEの面積が最小となるのは$\boldsymbol{t=\frac{10}{9}}$のときで，そのときの面積は

$$\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{224}{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{42}}{3}}$$

$\boxed{3}$ 三角錐 OABC において，

$$AB=2\sqrt{3},\ OA=OB=OC=AC=BC=\sqrt{7}$$

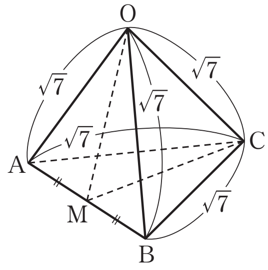
とする．このとき，三角錐 OABC の体積を求めよ．

辺 AB の中点を M とすると，

△OAB，△CAB は 3 辺の長さが $\sqrt{7}$，$\sqrt{7}$，$2\sqrt{3}$ の

二等辺三角形より

$$OM=CM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{7-3}=2$$

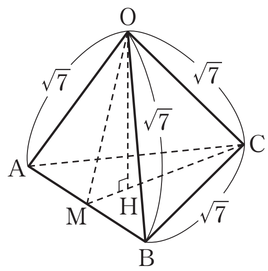


△OMC で余弦定理を用いて　$\cos\angle OMC=\dfrac{4+4-7}{2\cdot2\cdot2}=\dfrac{1}{8}$

よって　$\sin\angle OMC=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{8}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

点 O から平面 CAB に垂線 OH を下ろすと，図形の対称性より

H は線分 CM 上にある．



よって，$OH=OM\sin\angle OMC=2\cdot\dfrac{3\sqrt{7}}{8}=\dfrac{3\sqrt{7}}{4}$

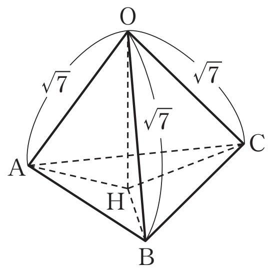
したがって，三角錐 OABC の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle CAB\cdot OH=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot2\cdot\frac{3\sqrt{7}}{4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{2}}$$

(別解)　点 O から平面 ABC に垂線 OH を下ろすと，

△OAH≡△OBH≡△OCH　より　AH＝BH＝CH

よって H は △ABC の外接円の中心である．

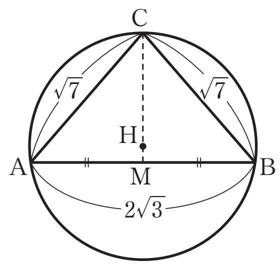


辺 AB の中点を M とすると

$$\sin\angle CAB=\frac{CM}{AC}=\frac{2}{\sqrt{7}}$$

よって △ABC の外接円の半径を R とすると

$$2R=\frac{BC}{\sin\angle CAB}=\frac{\sqrt{7}}{\frac{2}{\sqrt{7}}}=\frac{7}{2}\quad より\quad AH=R=\frac{7}{4}$$



$$OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{7-\frac{49}{16}}=\frac{3\sqrt{7}}{4}$$

したがって，三角錐 OABC の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot OH=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot2\times\frac{3\sqrt{7}}{4}=\frac{\sqrt{21}}{2}$$

第30講　関数総合(1)

1　m を実数とする．関数 $y=|x|(x-4)-x-m$ のグラフが x 軸と異なる3点で交わるような m の値の範囲を求めよ．

関数 $y=|x|(x-4)-x-m$ と x 軸との交点の個数は

方程式 $|x|(x-4)-x-m=0$ の異なる実数解の個数である．

その個数が3個になるのは，$|x|(x-4)-x=m$ より

関数 $f(x)=|x|(x-4)-x$ のグラフと直線 $y=m$ とが異なる3つの交点をもつときである．

$x \geqq 0$ のとき

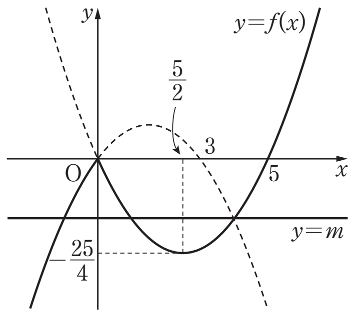
$$f(x)=x(x-4)-x=x^2-5x$$

$$=x(x-5)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$$

$x<0$ のとき

$$f(x)=-x(x-4)-x=-x^2+3x$$

$$=-x(x-3)=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$



よって右図より，求める m の値の範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{25}{4}<m<0}$$

$\boxed{2}$　2次関数 $y=x^2-ax+1$ の区間 $0\leqq x\leqq 1$ における y の最大値を M，最小値を m とする．$M-m=\dfrac{1}{2}$ となる a の値を求めよ．

$f(x)=x^2-ax+1=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+1$ とおく．　軸：$x=\dfrac{a}{2}$

最大値 M について

$\dfrac{a}{2}\leqq\dfrac{1}{2}$　つまり　$a\leqq 1$ のとき　$M=f(1)=-a+2$

$\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{a}{2}$　つまり　$1\leqq a$ のとき　$M=f(0)=1$

最小値 m について

$\dfrac{a}{2}\leqq 0$　つまり　$a\leqq 0$ のとき　$m=f(0)=1$

$0\leqq\dfrac{a}{2}\leqq 1$　つまり　$0\leqq a\leqq 2$ のとき　$m=f\left(\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{4}+1$

$1\leqq\dfrac{a}{2}$　つまり　$2\leqq a$ のとき　$m=f(1)=-a+2$

以上より

(i)　$a\leqq 0$ のとき　$M-m=(-a+2)-1=-a+1$

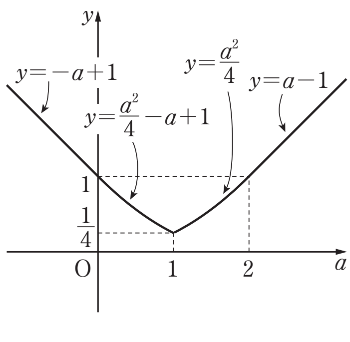
(ii)　$0\leqq a\leqq 1$ のとき　$M-m=(-a+2)-\left(-\dfrac{a^2}{4}+1\right)=\dfrac{a^2}{4}-a+1$

(iii)　$1\leqq a\leqq 2$ のとき　$M-m=1-\left(-\dfrac{a^2}{4}+1\right)=\dfrac{a^2}{4}$

(iv)　$2\leqq a$ のとき　$M-m=1-(-a+2)=a-1$

よってグラフの概形より，$M-m=\dfrac{1}{2}$ となるのは

(ii)または(iii)のときである．



$\dfrac{a^2}{4}-a+1=\dfrac{1}{2}$ のとき

$a^2-4a+2=0$　$0\leqq a\leqq 1$ より　$a=2-\sqrt{2}$

$\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{1}{2}$ のとき

$a^2=2$　　$1\leqq a\leqq 2$ より　$a=\sqrt{2}$

以上より　$\boldsymbol{a=2-\sqrt{2},\ \sqrt{2}}$

$\boxed{3}$ [1]　a を実数の定数とする．2つの関数 $f(x)=x^2-ax+3$ と
$g(x)=x^2-(2a+1)x+a^2+a$ について，次の各問いに答えよ．
(1)　すべての実数 x について，$f(x)\geqq 0$ が成り立つための条件を a を用いて表せ．
(2)　$g(x)\leqq 0$ を満たすすべての実数 x について，$f(x)>0$ が成り立つための条件を a を用いて表せ．

(1)　すべての x について $f(x)\geqq 0$　つまり　$x^2-ax+3\geqq 0$ が成り立つのは
方程式 $x^2-ax+3=0$ の判別式を D とすると，$D\leqq 0$ のとき
$D=a^2-4\cdot 3\leqq 0$ より　$a^2\leqq 12$　　よって　$\boldsymbol{-2\sqrt{3}\leqq a\leqq 2\sqrt{3}}$

(2)　$g(x)\leqq 0$ より　$x^2-(2a+1)x+a^2+a\leqq 0$　　$(x-a)(x-a-1)\leqq 0$
$a\leqq x\leqq a+1$
よって　$a\leqq x\leqq a+1$ における $f(x)$ の最小値が0より大きいときを求めればよい．
$f(x)=x^2-ax+3=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+3$　　軸：$x=\dfrac{a}{2}$

$\dfrac{a}{2}<a$　つまり　$a>0$ のとき
最小値 $f(a)=3>0$　これは成立する．よって　$a>0$

$a\leqq\dfrac{a}{2}\leqq a+1$　つまり　$-2\leqq a\leqq 0$ のとき
最小値 $f\left(\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{4}+3>0$　　$a^2-12<0$　　$-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$
よって　$-2\leqq a\leqq 0$

$\dfrac{a}{2}>a+1$　つまり　$a<-2$ のとき
最小値 $f(a+1)=a+4>0$　　$a>-4$　　よって　$-4<a<-2$

以上より，$\boldsymbol{a>-4}$

3 [2]　2次方程式 $2x^2-2ax+a=0$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　この方程式が実数解をもつとき，少なくとも1つの解は0以上になることを示せ．

(2)　この方程式が $0 \leqq x < \dfrac{2}{3}$ に少なくとも1つの実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ．

(1)　方程式 $2x^2-2ax+a=0$ ……①　が実数解をもつのは，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=a^2-2a \geqq 0 \quad a(a-2) \geqq 0 \qquad \text{つまり} \quad a \leqq 0,\ 2 \leqq a \quad \text{……②}$$

のときである．

$$f(x)=2x^2-2ax+a$$
$$=2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{2}+a$$

とおく．

$a \leqq 0$ のとき　$f(0) \leqq 0$

$a \geqq 2$ のとき　軸　$x=\dfrac{a}{2} \geqq 1$

いずれの場合も，関数 $y=2x^2-2ax+a$ のグラフは，

x 軸と $x \geqq 0$ の部分で少なくとも1つの共有点をもつ．

よって，①が実数解をもつとき，少なくとも1つの解は0以上となる．

(2)　①が実数解をもつためには，(1)より $a \leqq 0$，$2 \leqq a$ であることが必要である．

$a \leqq 0$ のとき　　$f(0) \leqq 0$ より

$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{8}{9}-\dfrac{a}{3}>0$　つまり　$a<\dfrac{8}{3}$ であればよい．

よって　$a \leqq 0$

$a \geqq 2$ のとき　　軸　$x=\dfrac{a}{2} \geqq 1 > \dfrac{2}{3}$　　$f(0)=a>0$ より

$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{8}{9}-\dfrac{a}{3}<0$　つまり　$a>\dfrac{8}{3}$ であればよい．

これは $a \geqq 2$ を満たす．　よって　$a>\dfrac{8}{3}$

以上より　$\boldsymbol{a \leqq 0,\ \dfrac{8}{3}<a}$

第 31 講　関数総合(2)

1 ［1］　$0 \leqq \theta < \pi$ のとき，方程式 $\cos 4\theta - 2\cos 3\theta + \cos 2\theta = 0$ を解け.

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1 = 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1 = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

したがって　$\cos 4\theta - 2\cos 3\theta + \cos 2\theta = 0$ は次のように変形できる

$8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 - 2(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) + 2\cos^2\theta - 1 = 0$

$4\cos^4\theta - 4\cos^3\theta - 3\cos^2\theta + 3\cos\theta = 0$

$\cos\theta(4\cos^3\theta - 4\cos^2\theta - 3\cos\theta + 3) = 0$

$\cos\theta(\cos\theta - 1)(4\cos^2\theta - 3) = 0$

よって　$\cos\theta = 0,\ 1,\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < \pi$　より　$\boldsymbol{\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi}$

1 ［2］　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $1 + \cos\theta + \cos 2\theta > \sin\theta + \sin 2\theta$ を満たす θ の値の範囲を求めよ.

$1 + \cos\theta + \cos 2\theta > \sin\theta + \sin 2\theta$

$1 + \cos\theta + 2\cos^2\theta - 1 > \sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta$

$(2\cos\theta + 1)\sin\theta - 2\cos^2\theta - \cos\theta < 0$

$(2\cos\theta + 1)\sin\theta - \cos\theta(2\cos\theta + 1) < 0$

$(2\cos\theta + 1)(\sin\theta - \cos\theta) < 0$

したがって　　$2\cos\theta + 1 > 0$　かつ　$\sin\theta - \cos\theta < 0$　……①

　　または　$2\cos\theta + 1 < 0$　かつ　$\sin\theta - \cos\theta > 0$　……②

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のもとで

①のとき　$\cos\theta > -\dfrac{1}{2}$ かつ $\sin\theta < \cos\theta$　より

$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{4}{3}\pi < \theta < 2\pi$

②のとき　$\cos\theta < -\dfrac{1}{2}$ かつ $\sin\theta > \cos\theta$　より

$\dfrac{2}{3}\pi < \theta < \dfrac{5}{4}\pi$

以上より　$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{2}{3}\pi < \theta < \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi < \theta < 2\pi}$

$\boxed{2}$ $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数 $y=(2\sin\theta-3\cos\theta)^2-(2\sin\theta-3\cos\theta)+1$ の最大値 M と最小値 m を求めよ．

$t=2\sin\theta-3\cos\theta$ とおくと

$t=\sqrt{13}\sin(\theta-\alpha)$　　ただし α は　$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ を満たす鋭角.

　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より　$-\alpha \leqq \theta-\alpha \leqq \pi-\alpha$

よって　$\theta-\alpha=\dfrac{\pi}{2}$　つまり $\theta=\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ のとき

　　t は最大値 $\sqrt{13}\times 1=\sqrt{13}$ をとり，

　$\theta-\alpha=-\alpha$　つまり $\theta=0$ のとき

　　t は最小値 $\sqrt{13}\times\left(-\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)=-3$ をとる.

このとき　$y=(2\sin\theta-3\cos\theta)^2-(2\sin\theta-3\cos\theta)+1$

$$=t^2-t+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\quad(-3 \leqq t \leqq \sqrt{13})\text{ より}$$

$t=-3$ のとき　最大値 $\boldsymbol{M=13}$　　$t=\dfrac{1}{2}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{m=\dfrac{3}{4}}$ をとる.

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=2\sin^2 x+4\sin x+3\cos 2x$ について，以下の問いに答えよ．ただし，$0 \leqq x < 2\pi$ である．

(1) $t=\sin x$ とするとき，$f(x)$ を t の式で表せ．

(2) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x の値をすべて求めよ．

(3) 方程式 $f(x)=a$ の相異なる解が4個であるような実数 a の値の範囲を求めよ．

(1) $f(x)=2\sin^2 x+4\sin x+3\cos 2x$

$\quad =2\sin^2 x+4\sin x+3(1-2\sin^2 x)=-4\sin^2 x+4\sin x+3$

よって　$t=\sin x$ のとき　$\boldsymbol{f(x)=-4t^2+4t+3}$

(2) $f(x)=-4t^2+4t+3=-4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+4=g(t)$ とおくと

$0 \leqq x < 2\pi$　より　$-1 \leqq t \leqq 1$

よって　$t=\frac{1}{2}$ のとき　$g(t)$ は最大値 $g\left(\frac{1}{2}\right)=4$

$t=-1$ のとき　$g(t)$ は最小値 $g(-1)=-5$ をとる．

したがって　$f(t)$ の**最大値は** 4　$\left(\boldsymbol{x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi}\ \textbf{のとき}\right)$

最小値は -5　$\left(\boldsymbol{x=\frac{3}{2}\pi}\ \textbf{のとき}\right)$

(3) $f(x)=a$　より　$-4t^2+4t+3=a$

ここで，$-1<t<1$ である t の値1つにつき，x は $0 \leqq x < 2\pi$ の範囲に2つ存在し，

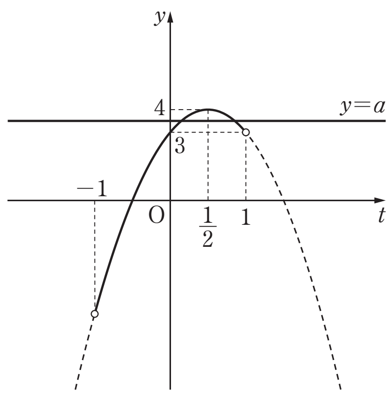
$t=\pm 1$ である t の値1つにつき，x は $0 \leqq x < 2\pi$ の範囲に1つ存在する．

よって $f(x)=a$ の相異なる解が4個であるのは，

$y=g(t)$ のグラフと $y=a$ のグラフが $-1<t<1$ の

範囲に異なる2つの共有点をもつときである．

右図より求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{3<a<4}$



第32講　関数総合(3)

1 [1]　0 でない実数 x, y が関係式 $7^{\frac{1}{x}}=9$ および $63^{\frac{1}{y}}=3$ を満たしているとき $2x-y$ の値を求めよ.

$7^{\frac{1}{x}}=9$　より　$9^x=7$　　よって　$3^{2x}=7$

$63^{\frac{1}{y}}=3$　より　$3^y=63$

したがって　$3^{2x-y}=3^{2x}\cdot 3^{-y}=\dfrac{3^{2x}}{3^y}=\dfrac{7}{63}=\dfrac{1}{9}=3^{-2}$

ゆえに　$2x-y=\mathbf{-2}$

1 [2]　(1)　$\dfrac{(\alpha+\beta)^3-(\alpha^3+\beta^3)}{\alpha+\beta}=\boxed{}\,\alpha\beta$ である. $\boxed{}$ にあてはまる数を答えよ.

(2)　$a=\sqrt[3]{48}+\sqrt[3]{36}$ のとき, $\dfrac{a^3-84}{a}$ の値を求めよ.

(3)　$b=\sqrt[3]{10+\sqrt{19}}+\sqrt[3]{10-\sqrt{19}}$ のとき, $\log_{81}\dfrac{b^3-20}{b}$ の値を求めよ.

(1)　$(\alpha+\beta)^3-(\alpha^3+\beta^3)=3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2=3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

よって　$\dfrac{(\alpha+\beta)^3-(\alpha^3+\beta^3)}{\alpha+\beta}=\dfrac{3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}=\mathbf{3}\alpha\beta$　……①

(2)　$\sqrt[3]{48}=\alpha$, $\sqrt[3]{36}=\beta$　とおくと　$a=\alpha+\beta$

また, $\alpha^3+\beta^3=48+36=84$

よって　$\dfrac{a^3-84}{a}=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-(\alpha^3+\beta^3)}{\alpha+\beta}=3\alpha\beta=3\cdot\sqrt[3]{48}\cdot\sqrt[3]{36}$

$=3\cdot\sqrt[3]{12\cdot 4\times 12\cdot 3}=3\cdot 12=\mathbf{36}$

(3)　$\sqrt[3]{10+\sqrt{19}}=\alpha$, $\sqrt[3]{10-\sqrt{19}}=\beta$　とおくと　$b=\alpha+\beta$

また, $\alpha^3+\beta^3=10+\sqrt{19}+10-\sqrt{19}=20$

$\alpha\beta=\sqrt[3]{(10+\sqrt{19})(10-\sqrt{19})}=\sqrt[3]{100-19}=\sqrt[3]{81}=3\sqrt[3]{3}$

したがって　$\dfrac{b^3-20}{b}=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-(\alpha^3+\beta^3)}{\alpha+\beta}=3\alpha\beta=9\sqrt[3]{3}$

よって　$\log_{81}\dfrac{b^3-20}{b}=\log_{81}9\sqrt[3]{3}=\dfrac{\log_3 9\sqrt[3]{3}}{\log_3 81}=\dfrac{2+\dfrac{1}{3}}{4}=\mathbf{\dfrac{7}{12}}$

$\boxed{2}$ [1]　a を定数とする．xy 平面上の曲線 $y=\log_2 x$ と直線 $y=x+a$ は2つの共有点をもつ．共有点の x 座標 x_1，x_2 が $x_2=4x_1$ を満たすように，a の値を定めよ．

$y=\log_2 x$ と $y=x+a$ の共有点の x 座標が x_1，x_2 であることより，x についての方程式 $\log_2 x=x+a$ の2解が x_1，x_2 である．

よって　$\log_2 x_1=x_1+a$，$\log_2 x_2=x_2+a$

この2式について辺々差をとると

$\log_2 x_1-\log_2 x_2=x_1-x_2$

$x_2=4x_1$ であることより

$\log_2 x_1-\log_2 4x_1=x_1-4x_1$

$\log_2 \dfrac{x_1}{4x_1}=-3x_1$　　$-2=-3x_1$　　よって　$x_1=\dfrac{2}{3}$

したがって　$a=\log_2 x_1-x_1=\log_2 \dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}-\log_2 3}$

$\boxed{2}$ [2]　a を2以上の定数とする．関数 $f(x)=4^x+4^{-x}-2a(2^x+2^{-x})$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$t=2^x+2^{-x}$ とおく．$t\geqq 2$ であることを示せ．

(2)　$f(x)$ の最小値と，最小値をとるときの x の値を a で表せ．

(1)　$2^x>0$，$2^{-x}>0$ より　(相加平均)$\geqq$(相乗平均)の関係から

$t=2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$

等号成立は　$2^x=2^{-x}$　　$x=-x$　よって　$x=0$ のとき

よって　$t\geqq 2$

(2)　$4^x+4^{-x}=(2^x)^2+(2^{-x})^2=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2$

よって　$f(x)=t^2-2-2at=t^2-2at-2=(t-a)^2-a^2-2$

(1)より　$t\geqq 2$

また，$f(x)$ のグラフの軸は $t=a$ であり，$a\geqq 2$ より軸は変域内にある．

したがって $f(x)$ の最小値は　$-a^2-2$

また，$t=a$ のとき

$2^x+2^{-x}=a$　　$2^x+\dfrac{1}{2^x}=a$　　$(2^x)^2-a\cdot 2^x+1=0$

$2^x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$

よって最小値をとる x の値は　$x=\boldsymbol{\log_2 \dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}}$

3　次の不等式を満たす $(x,\ y)$ の表す領域を図示せよ．

(1)　$\log_2(x+y)+\log_{\frac{1}{2}}(x-y)>1$

(2)　$a^{2x}-a^{2y}-a^{2x+y}+a^{x+2y}-a^x+a^y<0\quad(a>1)$

(1)　真数条件より　$x+y>0$　かつ　$x-y>0$　　つまり　$-x<y<x$　……①

また，$\log_{\frac{1}{2}}(x-y)=\dfrac{\log_2(x-y)}{\log_2\frac{1}{2}}=-\log_2(x-y)$

よって与式は　$\log_2(x+y)-\log_2(x-y)>\log_2 2$

$\log_2(x+y)>\log_2 2+\log_2(x-y)$

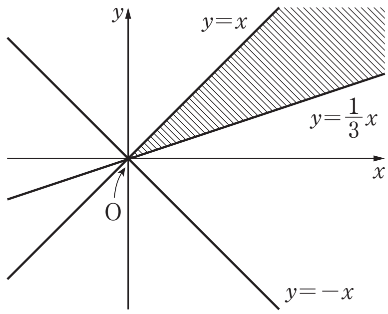
$\log_2(x+y)>\log_2 2(x-y)$

底2は1より大きいので

$x+y>2(x-y)$　　つまり　$y>\dfrac{1}{3}x$　……②

①と②の共通部分より，求める領域は

右図斜線部分（境界含まず）．



(2)　$a^{2x}-a^{2y}-a^{2x+y}+a^{x+2y}-a^x+a^y<0$

$(a^x)^2-(a^y)^2-(a^x)^2\cdot a^y+a^x\cdot(a^y)^2-a^x+a^y<0$

$a^x=X,\ a^y=Y$　とおくと　$X>0,\ Y>0$

$X^2-Y^2-X^2Y+XY^2-X+Y<0$

$(X+Y)(X-Y)-XY(X-Y)-(X-Y)<0$

$(X-Y)\{(X+Y)-XY-1\}<0$

$-(X-Y)(XY-X-Y+1)<0$

$(X-Y)(X-1)(Y-1)>0$　……①

①を満たすのは

(i)　$(X-Y)>0$　かつ　$(X-1)>0$　かつ　$(Y-1)>0$　　または

(ii)　$(X-Y)>0$　かつ　$(X-1)<0$　かつ　$(Y-1)<0$　　または

(iii)　$(X-Y)<0$　かつ　$(X-1)>0$　かつ　$(Y-1)<0$　　または

(iv)　$(X-Y)<0$　かつ　$(X-1)<0$　かつ　$(Y-1)>0$

のとき．

$X-Y>0$ のとき　$X>Y$　つまり　$a^x>a^y$　　$a>1$ より　$x>y$

$X-Y<0$ のとき　$x<y$

$X-1>0$ のとき　$a^x>1$　　$a^x>a^0$　　$a>1$ より　$x>0$

$X-1<0$ のとき　$x<0$

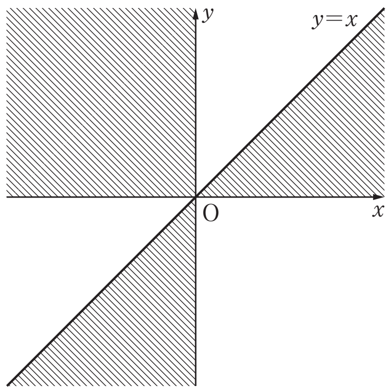
同様に　$Y-1>0$ のとき　$y>0$

$Y-1<0$ のとき　$y<0$

以上より，求める領域は

(i) $\begin{cases} x>y \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$ または (ii) $\begin{cases} x>y \\ x<0 \\ y<0 \end{cases}$ または (iii) $\begin{cases} x<y \\ x>0 \\ y<0 \end{cases}$ または (iv) $\begin{cases} x<y \\ x<0 \\ y>0 \end{cases}$

を満たす部分．ただし(iii)を満たす領域はなし．
図示すると右図斜線部分（境界含まず）．



第33講　関数総合(4)

1　座標平面上の原点Oを通り，x 軸とのなす角が 30°，傾きが正の直線と，放物線 $y=x^2$ との交点で，Oと異なるものをAとおく．

(1)　点Aの座標を求めよ．

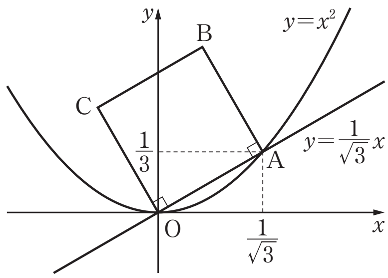
(2)　線分OAを1辺とする正方形OABCをつくる．ただし，点Cは第2象限にとる．点B，Cの座標をそれぞれ求めよ．

(3)　直線OBに垂直で，放物線 $y=x^2$ に接する直線の方程式を求めよ．

(1)　原点Oを通り，x 軸とのなす角が 30° で傾きが正の直線は，$y=(\tan 30^\circ)x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ である．

この直線と放物線 $y=x^2$ との共有点のうち，原点Oと異なるものの x 座標は

$$x^2=\frac{1}{\sqrt{3}}x \quad かつ \quad x\neq 0 \quad より \quad x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$



よって求める点Aの座標は $\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{3}}\right)$

(2)　点Cの座標を $(s,\ t)$ とすると，OA⊥OCより

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{t}{s}=-1 \qquad よって \quad t=-\sqrt{3}s$$

$$\mathrm{OC}=\mathrm{OA}=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2}{3} \quad より \quad s^2+t^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

よって　$4s^2=\dfrac{4}{9}$　　$s^2=\dfrac{1}{9}$　　$s<0$ より　$s=-\dfrac{1}{3}$　　したがって　$\mathrm{C}\left(\boldsymbol{-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}}\right)$

また，点Bの座標を $(a,\ b)$ とすると，線分OBと線分ACの中点が一致するので

$$\frac{a+0}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\right),\quad \frac{b+0}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

よって　$a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}$，$b=\dfrac{\sqrt{3}+1}{3}$　　したがって　$\mathrm{B}\left(\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}-1}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}+1}{3}}\right)$

(3)　直線OBの傾きは $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ より　求める直線の傾きは

$$-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=-\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}=\sqrt{3}-2$$

また，$y=x^2$　より　$y'=2x$　　$2x=\sqrt{3}-2$　より　$x=\dfrac{\sqrt{3}-2}{2}$

よって求める直線の方程式は

$$y=(\sqrt{3}-2)\left(x-\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)^2=(\sqrt{3}-2)x-\frac{(\sqrt{3}-2)^2}{2}+\frac{(\sqrt{3}-2)^2}{4} \quad より$$

$\boldsymbol{y=(\sqrt{3}-2)x+\sqrt{3}-\dfrac{7}{4}}$

> **2** [1]　円 $C：x^2+y^2+2x-6y+k=0$ について考える．原点Oから C に引いた2本の接線が直交するとき，k の値を求めよ．

円 $C：(x+1)^2+(y-3)^2=-k+10$ の接線のうち，原点Oを通るものを $y=mx$　つまり $mx-y=0$ とおくと

円の中心 $(-1,\ 3)$ から接線 $mx-y=0$ への距離は円の半径に等しいから

$$\frac{|-m-3|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{-k+10}\quad より\quad (m+3)^2=(-k+10)(m^2+1)$$

$$(9-k)m^2-6m+1-k=0$$

この方程式の2解が2接線の傾きであり，直交条件より2解の積が -1 のときである．

解と係数の関係より　$\dfrac{1-k}{9-k}=-1$　　よって　$\boldsymbol{k=5}$

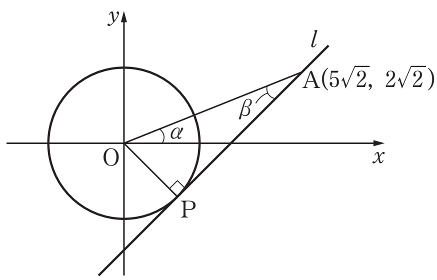
> **2** [2]　原点Oを中心とする半径3の円を C とする．点 $\mathrm{A}(5\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$ を通り円Cに接する直線で傾きが正のものを l とし，C と l の接点をPとする．
>
> (1)　OA，APを求めよ．
>
> (2)　直線OAと x 軸のなす角を $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とし，$\angle\mathrm{OAP}=\beta$ とおく．$\tan\alpha$，$\tan\beta$ を求めよ．
>
> (3)　l の傾きを求めよ．

(1)　$\mathrm{OA}=\sqrt{(5\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=\boldsymbol{\sqrt{58}}$

△OAPで三平方の定理より　$\mathrm{AP}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OP}^2}=\sqrt{(\sqrt{58})^2-3^2}=\boldsymbol{7}$

(2)　点Aの座標を利用して　$\tan\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$

直角三角形OAPにて　$\tan\beta=\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{AP}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{7}}$



(3)　求める l の傾きは

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{7}}{1-\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{7}}=\boldsymbol{1}$$

3　座標平面上に，2つの放物線 $C_1: y=(x-t)^2+t$，$C_2: y=-x^2+4$ がある．ただし，t は実数とする．

(1)　C_1，C_2 が異なる2点で交わるとき，t の値の範囲を求めよ．

(2)　(1)のとき，C_1 と C_2 の2つの交点を結ぶ線分の中点の軌跡を図示せよ．

(1)　C_1 と C_2 の式より y を消去して　$(x-t)^2+t=-x^2+4$

$2x^2-2tx+t^2+t-4=0$　……①

この方程式の判別式を D とすると，C_1 と C_2 が異なる2点で交わるのは $D>0$ のとき．

$\dfrac{D}{4}=t^2-2(t^2+t-4)>0$　　$t^2+2t-8<0$　　$(t+4)(t-2)<0$

よって　$\boldsymbol{-4<t<2}$

(2)　(1)のとき，C_1 と C_2 の交点の x 座標を α，β とすると，α，β は方程式①の2解である．

よって解と係数の関係より　$\alpha+\beta=t$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{2}(t^2+t-4)$

このとき，2つの交点の中点を $(X,\ Y)$ とすると

$X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{t}{2}$　……②

$Y=\dfrac{(-\alpha^2+4)+(-\beta^2+4)}{2}=\dfrac{-(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta+8}{2}=\dfrac{-t^2+(t^2+t-4)+8}{2}$

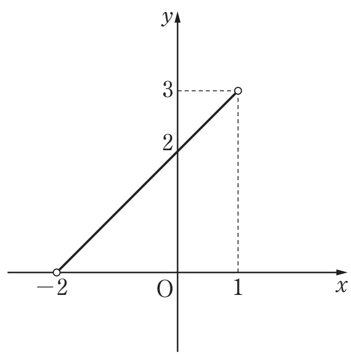
$=\dfrac{t+4}{2}$　……③

②より　$t=2X$　　これを③に代入して　$Y=\dfrac{2X+4}{2}=X+2$

また，(1)より　$-4<t<2$　つまり　$-4<2X<2$　より　$-2<X<1$

よって求める中点の軌跡は，直線 $y=x+2$ の $-2<x<1$ の部分．

図示すると右図．



第34講　関数総合(5)

1　曲線 $y=x^2$ を C とする．C 上の点 A$(\alpha,\ \alpha^2)$ $(\alpha<0)$ における曲線 C の接線を l とする．また，この接線 l 上の点 P から，曲線 C に l とは異なる接線 m をひく．ただし，点 P の x 座標は p とし，$p>\alpha$ とする．

(1)　接線 m の曲線 C との接点 B の座標を求めよ．

(2)　点 A と点 B を通る直線が，直線 l と垂直となるとき，点 P の座標を求めよ．

(3)　点 P を(2)で求めたものとする．このとき，点 P を通り，△ABP の面積を二等分する直線の方程式を求めよ．

(1)　$y=x^2$　より　$y'=2x$

点 A$(\alpha,\ \alpha^2)$ における接線は　$l:y=2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2=2\alpha x-\alpha^2$　……①

また，点 B の座標を $(\beta,\ \beta^2)$ とおくと，点 B における接線は

$y=2\beta x-\beta^2$　……②

①と②の交点 $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$ が点 P であり，その x 座標が p であることから

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=p$　より　$\beta=2p-\alpha$　　よって　**B$\boldsymbol{(2p-\alpha,\ (2p-\alpha)^2)}$**

(2)　$\beta\neq\alpha$ より，直線 AB の傾きは　$\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}=\beta+\alpha=2p$

よって　$2p\times 2\alpha=-1$　　$p=-\dfrac{1}{4\alpha}$　　　このとき　$\alpha\beta=\alpha(2p-\alpha)=-\alpha^2-\dfrac{1}{2}$

したがって　**P$\boldsymbol{\left(-\dfrac{1}{4\alpha},\ -\alpha^2-\dfrac{1}{2}\right)}$**

(3)　線分 AB の中点

$\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)=\left(p,\ 2p^2+\alpha^2+\dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{4\alpha},\ \alpha^2+\dfrac{1}{8\alpha^2}+\dfrac{1}{2}\right)$ と

点 P$\left(-\dfrac{1}{4\alpha},\ -\alpha^2-\dfrac{1}{2}\right)$ を通る直線が求める直線である．

よって　$\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{4\alpha}}$

$\boxed{2}$　3 次関数 $f(x)$ は，次の 2 つの条件を満たすとする．

（条件 1）　関数 $f(x)$ は $x=1$ と $x=2$ で極値をもつ．

（条件 2）　整式 $f(x)$ を x^2-3x+1 で割った余りは $-x+2$ である．

(1)　$f(x)$ を求めよ．

(2)　$0 \leqq x \leqq 3$ における $|f(x)|$ の最大値を求めよ．

(1)　3 次関数 $f(x)$ が条件 2 を満たすことより

$f(x)=(x^2-3x+1)(ax+b)-x+2 \quad (a \neq 0)$　とおける．

このとき　$f(x)=ax^3+(-3a+b)x^2+(a-3b-1)x+b+2$ より

$f'(x)=3ax^2+(-6a+2b)x+(a-3b-1)$

また，条件 1 より　$f'(1)=f'(2)=0$

よって　$-2a-b-1=0,\ a+b-1=0$　より　$a=-2,\ b=3$

したがって　$\boldsymbol{f(x)=-2x^3+9x^2-12x+5}$

(2)　$f(x)=-(x-1)^2(2x-5)$

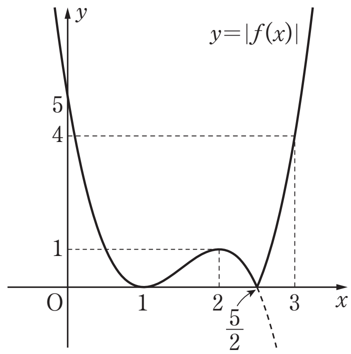
$f'(x)=-6x^2+18x-12$

$=-6(x-1)(x-2)$

よって　$f(x)$ の増減は右表．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	1	↘

したがって，$y=|f(x)|$ のグラフは右図となる．



$f(0)=5,\ f(3)=-4$ より

$|f(0)|=5,\ |f(3)|=4$

求める最大値は　**5**　（$x=0$ のとき）

3　曲線 $y=x^3-(3a+2)x^2-3a^2-4a+4$ が放物線 $y=x^2$ と相異なる 3 点で交わるための実数 a の値の範囲を求めよ.

$y=x^3-(3a+2)x^2-3a^2-4a+4$ と $y=x^2$ より

$x^3-(3a+2)x^2-3a^2-4a+4=x^2$

$x^3-(3a+3)x^2-3a^2-4a+4=0$

$f(x)=x^3-(3a+3)x^2-3a^2-4a+4$ とおくと，題意を満たすのは

$y=f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 3 つの共有点をもつときである.

$f'(x)=3x^2-2(3a+3)x=3x(x-2a-2)$

$2a+2=0$　つまり　$a=-1$ のとき　$f'(x)=3x^2\geqq 0$　より　$f(x)$ のグラフは増加し，x 軸と 3 つの異なる共有点をもつことはなく不適.

$a\neq -1$ のとき　$f(x)$ のグラフは $x=0$，$2a+2$ で極値をとる.

$f(0)=-3a^2-4a+4=-(3a-2)(a+2)$

$$\begin{aligned}f(2a+2)&=(2a+2)^3-(3a+3)(2a+2)^2-3a^2-4a+4\\&=8(a+1)^3-12(a+1)^3-3a^2-4a+4\\&=-4(a+1)^3-3a^2-4a+4\\&=-4a^3-15a^2-16a\\&=-a(4a^2+15a+16)\end{aligned}$$

$f(x)$ のグラフが x 軸と 3 つの異なる共有点をもつのは

$f(0)\cdot f(2a+2)<0$ のときである.

$(3a-2)(a+2)\cdot a(4a^2+15a+16)<0$

$4a^2+15a+16=4\left(a+\dfrac{15}{8}\right)^2+\dfrac{31}{16}>0$　より

$a(3a-2)(a+2)<0$　　したがって　$\boldsymbol{a<-2,\ 0<a<\dfrac{2}{3}}$

第35講　関数総合(6)

1 放物線 $C: y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 $l: y=mx$ について，以下の問いに答えよ．ただし m は $0<m<1$ を満たす実数である．

(1) C と l の原点以外の共有点の座標を m で表せ．

(2) C，l および直線 $x=2$ で囲まれる2つの図形の面積の和 S を m で表せ．

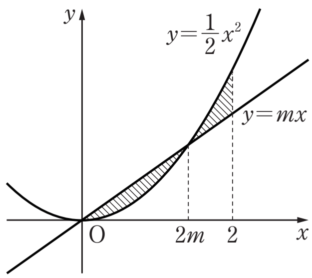
(3) S の最小値とそのときの m の値を求めよ．

(1) $y=\frac{1}{2}x^2$ と $y=mx$ より

$$\frac{1}{2}x^2=mx \qquad x^2-2mx=0 \qquad x(x-2m)=0$$

$$x=0,\ 2m$$

よって，C と l の原点以外の共有点の座標は $\boldsymbol{(2m,\ 2m^2)}$



(2) $0<m<1$ より　$0<2m<2$ であることから

$$S=\int_0^{2m}\left(mx-\frac{1}{2}x^2\right)dx+\int_{2m}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2-mx\right)dx$$

$$=\int_0^{2m}\left\{-\frac{1}{2}x(x-2m)\right\}dx+\left[\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}mx^2\right]_{2m}^{2}$$

$$=-\frac{1}{2}\times\left\{-\frac{1}{6}(2m-0)^3\right\}+\left(\frac{4}{3}-2m\right)-\left(\frac{4}{3}m^3-2m^3\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{4}{3}m^3-2m+\frac{4}{3}}$$

(3) $f(m)=\frac{4}{3}m^3-2m+\frac{4}{3}$ とおくと

$$f'(m)=4m^2-2=2(2m^2-1)$$

$0<m<1$ における $f(m)$ の増減は右表

m	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(m)$		$-$	0	$+$	
$f(m)$		↘	最小	↗	

よって S は $\boldsymbol{m=\frac{\sqrt{2}}{2}}$ **のとき**

最小値 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{3}=\boldsymbol{\frac{4-2\sqrt{2}}{3}}$ をとる

$\boxed{2}$ $b<a^2$ を満たす点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から放物線 C：$y=x^2$ へ２本の接線 l_1，l_2 を引き，その接点をそれぞれ $(\alpha,\ \alpha^2)$，$(\beta,\ \beta^2)$ とする．ただし $\alpha<\beta$ にとる．放物線 C と２直線 l_1，l_2 で囲まれた部分の面積を S とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　a と b を α と β を用いてそれぞれ表せ．

(2)　S を α と β を用いて表せ．

(3)　点 P が直線 $y=x-2$ 上を動くときの S の最小値と，それを与える P の座標を求めよ．

(1)　$y=x^2$ より　$y'=2x$

よって　C 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$$y=2t(x-t)+t^2=2tx-t^2$$

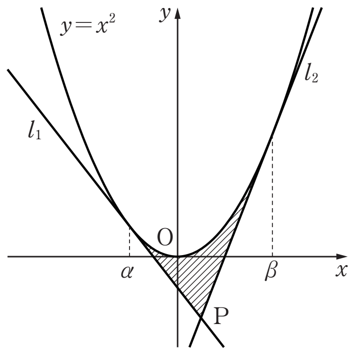
この接線が $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通るとき　$b=2ta-t^2$　　つまり　$t^2-2at+b=0$

この t の２次方程式の２解が α，β であることから，解と係数の関係より

$\alpha+\beta=2a$，$\alpha\beta=b$　　　よって，$\boldsymbol{a=\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$，$\boldsymbol{b=\alpha\beta}$

(2)　$(\alpha,\ \alpha^2)$，$(\beta,\ \beta^2)$ における C の接線 l_1，l_2 の方程式はそれぞれ

$$y=2\alpha x-\alpha^2,\quad y=2\beta x-\beta^2$$



$$\begin{aligned}
S&=\int_\alpha^a\{x^2-(2\alpha x-\alpha^2)\}dx+\int_a^\beta\{x^2-(2\beta x-\beta^2)\}dx\\
&=\int_\alpha^a(x-\alpha)^2dx+\int_a^\beta(x-\beta)^2dx\\
&=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^a+\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_a^\beta\\
&=\frac{1}{3}(a-\alpha)^3-\frac{1}{3}(a-\beta)^3\\
&=\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)^3\\
&=\frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3}
\end{aligned}$$

(別解)　２点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ を通る直線 AB の方程式は

$$y=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+\alpha^2=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$$

直線 AB と放物線 C で囲まれた部分の面積は

$$S_1=\int_\alpha^\beta\{(\alpha+\beta)x-\alpha\beta-x^2\}dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(\alpha-a,\ \alpha^2-b)=\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha(\alpha-\beta)\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(\beta-a,\ \beta^2-b)=\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2},\ \beta(\beta-\alpha)\right)$　より

三角形 ABP の面積は

$$S_2=\frac{1}{2}\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\beta(\beta-\alpha)-\alpha(\alpha-\beta)\cdot\frac{\beta-\alpha}{2}\right|$$
$$=\frac{1}{4}|(\beta-\alpha)^3|=\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3$$

よって　$S=S_2-S_1=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$

(3)　点 P が直線 $y=x-2$ 上を動くとき

$$\alpha\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}-2$$

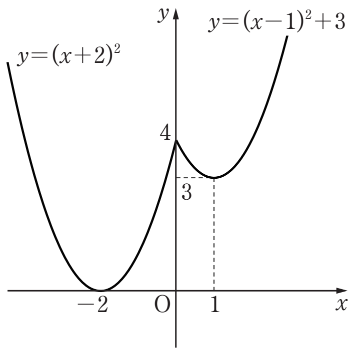
このとき　$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$$=(\alpha+\beta)^2-2(\alpha+\beta)+8$$
$$=(\alpha+\beta-1)^2+7$$

よって　$S=\frac{1}{12}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}$ は

$\alpha+\beta=1$ のとき　最小値 $\frac{1}{12}\cdot7^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\frac{7\sqrt{7}}{12}}$ をとる.

このとき **P の座標は** $\boldsymbol{\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\right)}$

$\boxed{3}$　曲線 $y=x^2+x+4-|3x|$ と直線 $y=mx+4$ で囲まれる部分の面積を，m の値によって場合分けして求めよ.



$y=x^2+x+4-|3x|$

$$=\begin{cases} x^2+x+4-3x=x^2-2x+4=(x-1)^2+3 & (x\geqq0) \\ x^2+x+4+3x=x^2+4x+4=(x+2)^2 & (x\leqq0) \end{cases}$$

よってこの曲線 C のグラフは右図.

C の $x\geqq0$ の部分と $l：y=mx+4$ の共有点の x 座標は

$x^2-2x+4=mx+4$　　$x^2-(m+2)x=0$

$x(x-m-2)=0$　　$x=0，m+2$

よって，$m+2>0$　つまり　$m>-2$ のとき

共有点は $x\geqq0$ に 2 つ存在し，

$m\leqq-2$ のとき　共有点は $(0，4)$ の 1 点のみ

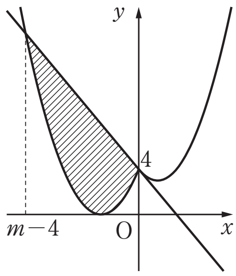
C の $x\leqq0$ の部分と l の共有点の x 座標は

$x^2+4x+4=mx+4$　　$x^2-(m-4)x=0$

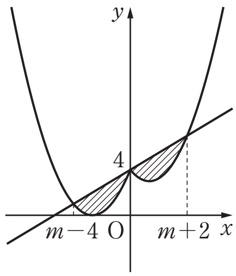
$x(x-m+4)x=0$　　$x=0，m-4$

よって，$m-4<0$　つまり　$m<4$ のとき　共有点は $x\leqq0$ に 2 つ存在し，

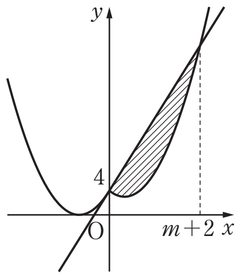
$m\geqq4$ のとき　共有点は $(0，4)$ の 1 点のみ



$m \leqq -2$ のとき



$-2 < m < 4$ のとき



$m \geqq 4$ のとき

よって，C と l で囲まれる部分の面積 S について

$m \leqq -2$ のとき

$$S=\int_{m-4}^{0}\{(mx+4)-(x^2+4x+4)\}dx$$

$$=-\int_{m-4}^{0}x(x-m+4)dx=\frac{1}{6}(-m+4)^3=-\frac{1}{6}m^3+2m^2-8m+\frac{32}{3}$$

$m \geqq 4$ のとき

$$S=\int_{0}^{m+2}\{(mx+4)-(x^2-2x+4)\}dx$$

$$=-\int_{0}^{m+2}x(x-m-2)dx=\frac{1}{6}(m+2)^3=\frac{1}{6}m^3+m^2+2m+\frac{4}{3}$$

$-2 < m < 4$ のとき

$$S=\int_{m-4}^{0}\{(mx+4)-(x^2+4x+4)\}dx+\int_{0}^{m+2}\{(mx+4)-(x^2-2x+4)\}dx$$

$$=\frac{1}{6}(-m+4)^3+\frac{1}{6}(m+2)^3$$

$$=3m^2-6m+12$$

以上より

$m \leqq -2$ のとき　　$\boldsymbol{-\frac{1}{6}m^3+2m^2-8m+\frac{32}{3}}$

$-2 < m < 4$ のとき　$\boldsymbol{3m^2-6m+12}$

$4 \leqq m$ のとき　　$\boldsymbol{\frac{1}{6}m^3+m^2+2m+\frac{4}{3}}$

第 36 講　数列

1　等差数列 $\{a_n\}$ と等比数列 $\{b_n\}$ がある．ただし，$b_1>0$，$b_2>0$ とする．この数列の初項から第 n 項までのそれぞれの和 S_n, S'_n に対して，$c_n=\dfrac{S_n}{S'_n}$ とおくとき，$c_1=2$, $c_2=3$, $c_3=3$ を満たすとする．

(1)　等比数列 $\{b_n\}$ の公比を r とする．r の値を求めよ．

(2)　S_n を a_1 と n の式で表せ．

(3)　c_n を n の式で表せ．

(1)　等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d，等比数列 $\{b_n\}$ の初項を b（公比を r）とする．

$c_1=\dfrac{S_1}{S'_1}=\dfrac{a}{b}=2$　より　$a=2b$　……①

$c_2=\dfrac{S_2}{S'_2}=\dfrac{a+(a+d)}{b+br}=\dfrac{2a+d}{b(1+r)}=3$　より　$2a+d=3b(1+r)$　……②

$c_3=\dfrac{S_3}{S'_3}=\dfrac{(2a+d)+(a+2d)}{b(1+r)+br^2}=\dfrac{3a+3d}{b(1+r+r^2)}=3$　より　$3a+3d=3b(1+r+r^2)$

つまり　$a+d=b(1+r+r^2)$　……③

①を②に代入して　$4b+d=3b(1+r)$　よって　$d=b(3r-1)$　……④

①と④を③に代入して　$2b+b(3r-1)=b(1+r+r^2)$

$b=b_1>0$　より　$2+3r-1=1+r+r^2$　　$r^2-2r=0$　　$r(r-2)=0$

$r=0$ とすると　$b_2=b\cdot 0=0$ より　$b_2>0$ に反し不適　　よって　$\boldsymbol{r=2}$

(2)　①より　$b=\dfrac{a}{2}$　　これと $r=2$ を④に代入して　$d=\dfrac{a}{2}\cdot 5=\dfrac{5}{2}a$

よって

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\frac{n\left\{2a+(n-1)\cdot\frac{5}{2}a\right\}}{2}=\frac{an(5n-1)}{4}=\boldsymbol{\frac{a_1n(5n-1)}{4}}$$

(3)　$S'_n=\dfrac{b(r^n-1)}{r-1}=\dfrac{\frac{a}{2}(2^n-1)}{2-1}=\dfrac{a_1(2^n-1)}{2}$

したがって　$c_n=\dfrac{S_n}{S'_n}=\dfrac{a_1n(5n-1)}{4}\cdot\dfrac{2}{a_1(2^n-1)}=\boldsymbol{\dfrac{n(5n-1)}{2(2^n-1)}}$

$\boxed{2}$ ［1］　実数 a，b を用いて $\sum_{k=5}^{10} i^k = a+bi$ と表すとき，a，b の値を求めよ．ただし i は虚数単位である．

$$\sum_{k=5}^{10} i^k = i^5+i^6+i^7+i^8+i^9+i^{10} = i+(-1)+(-i)+1+i+(-1) = -1+i$$

よって　$-1+i=a+bi$

a，b は実数より　$\boldsymbol{a=-1,\ b=1}$

$\boxed{2}$ ［2］　初項 1，公差 2 の等差数列 $\{a_n\}$ に対して，数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$，$\{d_n\}$ をそれぞれ

$$b_n = \frac{2n+1}{a_n},\quad c_n = \log_3 b_n,\quad d_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$$ で定める．

(1)　d_n を n の式で表せ．

(2)　d_n が整数となるような n を，小さい順に m 個並べたものの和を求めよ．

(1)　$a_n = 1+(n-1)\cdot 2 = 2n-1$

$$b_n = \frac{2n+1}{a_n} = \frac{2n+1}{2n-1}$$

$$c_n = \log_3 b_n = \log_3 \frac{2n+1}{2n-1} = \log_3(2n+1) - \log_3(2n-1)$$

よって

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{k=1}^{n} \{\log_3(2k+1) - \log_3(2k-1)\} \\ &= (\log_3 3 - \log_3 1) + (\log_3 5 - \log_3 3) + (\log_3 7 - \log_3 5) \\ &\qquad + \cdots\cdots + \{\log_3(2n+1) - \log_3(2n-1)\} \\ &= \boldsymbol{\log_3(2n+1)} \end{aligned}$$

(2)　$2n+1$ は 3 以上の自然数より，d_n が整数となるのは

$2n+1=3^l$（l は自然数），つまり　$n=\dfrac{3^l-1}{2}$ のとき

よって求める和は

$$\sum_{l=1}^{m} \frac{3^l-1}{2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{3(3^m-1)}{3-1} - m\right\} = \boldsymbol{\frac{3^{m+1}-2m-3}{4}}$$

3 ［1］ 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が

$$a_1=2,\ b_1=2,\ a_{n+1}=6a_n+2b_n,\ b_{n+1}=-2a_n+2b_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定められるとき，次の問いに答えよ.

(1) $c_n=a_n+b_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(1) $a_{n+1}=6a_n+2b_n$ ……①　　$b_{n+1}=-2a_n+2b_n$ ……②

①＋②より　$a_{n+1}+b_{n+1}=4(a_n+b_n)$，$a_1+b_1=2+2=4$

よって，$c_n=a_n+b_n$ とおくと　$c_{n+1}=4c_n$，$c_1=4$ より

数列 $\{c_n\}$ は初項 4，公比 4 の等比数列.

したがって　$c_n=4\cdot4^{n-1}=\boldsymbol{4^n}$

(2) (1)より　$a_n+b_n=4^n$　　よって　$b_n=4^n-a_n$

これを①に代入して　$a_{n+1}=6a_n+2(4^n-a_n)$

つまり　$a_{n+1}=4a_n+2\cdot4^n$

この両辺を 4^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{4^{n+1}}=\dfrac{a_n}{4^n}+\dfrac{1}{2}$

$d_n=\dfrac{a_n}{4^n}$ とおくと　$d_{n+1}=d_n+\dfrac{1}{2}$，$d_1=\dfrac{a_1}{4}=\dfrac{1}{2}$

よって数列 $\{d_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{2}$，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列

したがって　$d_n=\dfrac{1}{2}+(n-1)\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}n$

つまり　$\dfrac{a_n}{4^n}=\dfrac{1}{2}n$　　ゆえに　$a_n=\boldsymbol{\dfrac{n\cdot4^n}{2}}$

3 ［2］　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2a_n+n^2$ で与えられるとき，a_{n+1} を a_n を用いて表せ．また，a_n を n の式で表せ．

$a_1=S_1=2a_1+1^2$　　よって　$a_1=-1$

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\{2a_{n+1}+(n+1)^2\}-(2a_n+n^2)=2a_{n+1}-2a_n+2n+1$

したがって　$\boldsymbol{a_{n+1}=2a_n-2n-1}$　……①

また，$a_{n+2}=2a_{n+1}-2(n+1)-1$　……②

②－①より　$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)-2$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，$b_{n+1}=2b_n-2$　つまり　$b_{n+1}-2=2(b_n-2)$

また，$b_1=a_2-a_1=(2a_1-2\cdot1-1)-a_1=a_1-3=-4$　より　$b_1-2=-6$

よって数列 $\{b_n-2\}$ は　初項 -6　公比 2 の等比数列

したがって　$b_n-2=-6\cdot2^{n-1}$　　$b_n=2-6\cdot2^{n-1}$

つまり　$a_{n+1}-a_n=2-6\cdot2^{n-1}$

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2-6\cdot2^{k-1})=-1+2(n-1)-\frac{6(2^{n-1}-1)}{2-1}=2n+3-3\cdot2^n$$

これは $n=1$ のときも成立　　したがって　$\boldsymbol{a_n=2n+3-3\cdot2^n}$

(別解)　①が $a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=2(a_n+\alpha n+\beta)$　……③　と変形できるとすると

③を変形して　$a_{n+1}=2a_n+\alpha n+(-\alpha+\beta)$

これを①と比較して　$\alpha=-2$，$-\alpha+\beta=-1$　　よって　$\alpha=-2$，$\beta=-3$

このとき③より　$a_{n+1}-2(n+1)-3=2(a_n-2n-3)$

$c_n=a_n-2n-3$ とすると　$c_{n+1}=2c_n$，$c_1=a_1-2\cdot1-3=-6$

よって数列 $\{c_n\}$ は初項 -6，公比 2 の等比数列である

したがって　$c_n=-6\cdot2^{n-1}=-3\cdot2^n$

つまり　$a_n-2n-3=-3\cdot2^n$　より　$a_n=2n+3-3\cdot2^n$

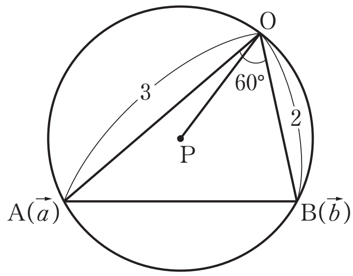
第37講　ベクトル(1)

$\boxed{1}$　$\mathrm{OA}=3$, $\mathrm{OB}=2$, $\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ の三角形OABの外接円の中心をPとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ．

(2)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{p}$ の値を求めよ．

(3)　$\vec{p}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．



(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}=3\times2\times\cos60^\circ=\mathbf{3}$

(2)　$\mathrm{AP}=\mathrm{OP}$　より　$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{p}|$

両辺2乗して　$|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{a}|^2=|\vec{p}|^2$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{p}=\dfrac{1}{2}|\vec{a}|^2=\mathbf{\dfrac{9}{2}}$

(3)　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと

$\vec{a}\cdot\vec{p}=\dfrac{9}{2}$　より　$\vec{a}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b})=s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}=9s+3t=\dfrac{9}{2}$

よって　$6s+2t=3$　……①

また，$\mathrm{BP}=\mathrm{OP}$　より　$|\vec{p}-\vec{b}|=|\vec{p}|$

両辺2乗して　$|\vec{p}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{p}+|\vec{b}|^2=|\vec{p}|^2$　　よって　$\vec{b}\cdot\vec{p}=\dfrac{1}{2}|\vec{b}|^2=2$

$\vec{b}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b})=s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=3s+4t$　より　$3s+4t=2$　……②

①，②より　$s=\dfrac{4}{9}$，$t=\dfrac{1}{6}$　　ゆえに　$\boldsymbol{\vec{p}=\dfrac{4}{9}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}}$

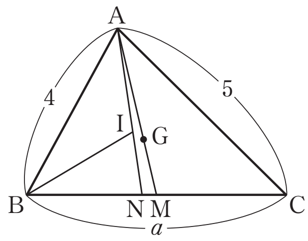
$\boxed{2}$ 三角形 ABC において，AB＝4，BC＝a，CA＝5 とする．また，△ABC の重心を G，内心を I，直線 AG と辺 BC の交点を M とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

(2) ∠A の二等分線と辺 BC の交点を N とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{GI}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と平行になるときの a の値を求めよ．また，そのときの △ABC の面積を求めよ．

(4) $\overrightarrow{\mathrm{GI}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と平行になるときの a の値を求めよ．また，そのときの △ABC の面積を求めよ．



(1) $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$

$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AG}}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$

(2) 角の二等分線の性質より　BN：NC＝AB：AC＝4：5

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$

また，AI は ∠A の二等分線 AN と ∠B の二等分線の交点である．

したがって　AI：IN＝BA：BN＝BA：$\frac{4}{9}$BC＝4：$\frac{4}{9}a$＝9：a　より

$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AI}}}=\frac{9}{9+a}\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{9}{a+9}\left(\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\boldsymbol{\frac{5}{a+9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{a+9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{GI}}=\overrightarrow{\mathrm{AI}}-\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\left(\frac{5}{a+9}-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\frac{4}{a+9}-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　……①

$\overrightarrow{\mathrm{GI}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と平行になるのは，①の $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の係数が 0 のとき

よって　$\frac{4}{a+9}-\frac{1}{3}=0$　　$\frac{4}{a+9}=\frac{1}{3}$　　$12=a+9$　　ゆえに　$\boldsymbol{a=3}$

このとき △ABC は ∠ABC＝90° の直角三角形より

$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AB}=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4=\boldsymbol{6}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{GI}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となるのは，①の $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の係数が 0 のとき

よって　$\frac{5}{a+9}-\frac{1}{3}=0$　　$\frac{5}{a+9}=\frac{1}{3}$　　$15=a+9$　　ゆえに　$\boldsymbol{a=6}$

このとき　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=6$　より　$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=6^2$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=36$　　$25-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+16=36$　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{5}{2}$

よって　$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4^2\cdot5^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5^2(2^2\cdot4^2-1)}{2^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{64-1}=\boldsymbol{\frac{15\sqrt{7}}{4}}$$

$\boxed{3}$ 三角形OABにおいて，OA＝2，OB＝3，$\angle\text{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$ であるとする．線分ABを1：3に内分する点をPとし，直線OPに関して点Aと対称な点をQとする．さらに，直線OQと直線ABの交点をRとする．$\overrightarrow{\text{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\text{OB}}=\vec{b}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

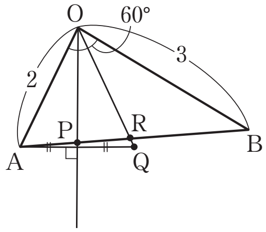
(1) $\overrightarrow{\text{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ.

(2) $\overrightarrow{\text{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ.

(3) 三角形OAQの面積を求めよ.

(1) $\boldsymbol{\overrightarrow{\text{OP}}=\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}}$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3}=2\cdot3\cdot\dfrac{1}{2}=3$



AQとOPの交点をMとおき，$\overrightarrow{\text{OM}}=t\overrightarrow{\text{OP}}=\dfrac{3}{4}t\vec{a}+\dfrac{1}{4}t\vec{b}$ とおくと

$\dfrac{\overrightarrow{\text{OA}}+\overrightarrow{\text{OQ}}}{2}=\overrightarrow{\text{OM}}$　より

$\overrightarrow{\text{OQ}}=2\overrightarrow{\text{OM}}-\overrightarrow{\text{OA}}=2\left(\dfrac{3}{4}t\vec{a}+\dfrac{1}{4}t\vec{b}\right)-\vec{a}=\left(\dfrac{3}{2}t-1\right)\vec{a}+\dfrac{1}{2}t\vec{b}$　……①

（解法1）　$\overrightarrow{\text{AQ}}\perp\overrightarrow{\text{OP}}$　より　$(\overrightarrow{\text{OQ}}-\overrightarrow{\text{OA}})\cdot\overrightarrow{\text{OP}}=0$

$\left\{\left(\dfrac{3}{2}t-2\right)\vec{a}+\dfrac{1}{2}t\vec{b}\right\}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}\right)=0$

$\{(3t-4)\vec{a}+t\vec{b}\}\cdot(3\vec{a}+\vec{b})=0$

$3(3t-4)|\vec{a}|^2+(3t-4)\vec{a}\cdot\vec{b}+3t\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

$3(3t-4)\cdot2^2+(3t-4)\cdot3+3t\cdot3+t\cdot3^2=0$　　　$t=\dfrac{20}{21}$

よって①より　$\boldsymbol{\overrightarrow{\text{OQ}}=\dfrac{3}{7}\vec{a}+\dfrac{10}{21}\vec{b}}$

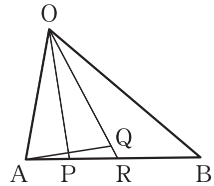
（解法2）　$|\overrightarrow{\text{OQ}}|=|\overrightarrow{\text{OA}}|=2$　より　$\left|\left(\dfrac{3}{2}t-1\right)\vec{a}+\dfrac{1}{2}t\vec{b}\right|^2=4$

$\left(\dfrac{3}{2}t-1\right)^2|\vec{a}|^2+2\left(\dfrac{2}{3}t-1\right)\cdot\dfrac{1}{2}t\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{1}{4}t^2|\vec{b}|^2=4$

$(3t-2)^2+\left(\dfrac{3}{2}t-1\right)t\cdot3+\dfrac{9}{4}t^2=4$

$\dfrac{63}{4}t^2-15t=0$　　$t\neq0$ より　$t=\dfrac{20}{21}$

よって①より　$\overrightarrow{\text{OQ}}=\dfrac{3}{7}\vec{a}+\dfrac{10}{21}\vec{b}$



(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3}{7}k\vec{a}+\dfrac{10}{21}k\vec{b}$ とおくと，

3 点 A，R，B が一直線上より　$\dfrac{3}{7}k+\dfrac{10}{21}k=1$　　$k=\dfrac{21}{19}$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{9}{19}\vec{a}+\dfrac{10}{19}\vec{b}$

よって　AR：RB＝10：9　　OQ：QR＝19：2

したがって　$\triangle\mathrm{OAQ}=\dfrac{19}{21}\triangle\mathrm{OAR}=\dfrac{19}{21}\cdot\dfrac{10}{19}\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{10}{21}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{3}}{7}}$

第38講　ベクトル(2)

1　四面体OABCにおいて，

$$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=\frac{\pi}{2},\ \angle\mathrm{BOC}=\frac{\pi}{3},\ \mathrm{OA}=\mathrm{OB}=2,\ \mathrm{OC}=1$$

とする．3点A, B, Cを通る平面上の点Pを考え，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\vec{p}$ は実数 s，t を用いて

$$\vec{p}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$$

と表される．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\vec{p}\cdot\vec{a}$，$\vec{p}\cdot\vec{b}$，$\vec{p}\cdot\vec{c}$ を s，t を用いて表せ．

(2)　点Pが $\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{BOP}=\angle\mathrm{COP}$ を満たすとき，s，t の値を求めよ．

(3)　(2)の条件を満たす点Pについて，直線APと直線BCの交点をQ，直線BPと直線ACの交点をRとする．BQ：QCおよびAR：RCを求めよ．

(4)　(2)の条件を満たす点Pについて，3つの四面体OABP，OBCP，OCAPの体積の比を求めよ．

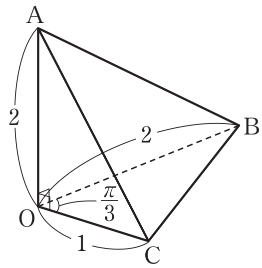
(1)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle\mathrm{BOC}=2\times1\times\cos\frac{\pi}{3}=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

より

$\boldsymbol{\vec{p}\cdot\vec{a}=}\{(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\}\cdot\vec{a}=\boldsymbol{4(1-s-t)}$

$\boldsymbol{\vec{p}\cdot\vec{b}=}\{(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\}\cdot\vec{b}=\boldsymbol{4s+t}$

$\boldsymbol{\vec{p}\cdot\vec{c}=}\{(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\}\cdot\vec{c}=\boldsymbol{s+t}$



(2)　$\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{BOP}=\angle\mathrm{COP}=\theta$ とおくと

$\vec{p}\cdot\vec{a}=2|\vec{p}|\cos\theta$，$\vec{p}\cdot\vec{b}=2|\vec{p}|\cos\theta$，$\vec{p}\cdot\vec{c}=|\vec{p}|\cos\theta$

よって　$4(1-s-t)=4s+t=2(s+t)$　より　$\boldsymbol{s=\frac{2}{9},\ t=\frac{4}{9}}$

(3)　$\vec{p}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{4}{9}\vec{c}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)$

$\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$ とすると，点Q′は線分BCを2：1に内分する点であり，

また $\vec{p}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$ より，点Pは線分AQ′を2：1に内分する点である．

よって点Q′は線分BC，AP上にあるので，点Q′は点Qと一致する．

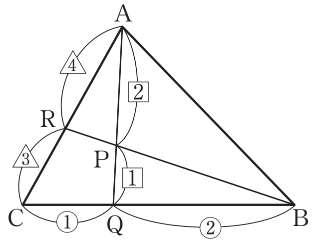
したがって　**BQ：QC＝2：1**

メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BQ}}\cdot\frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{PA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RC}}=1\quad つまり\quad \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RC}}=1\qquad \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RC}}=\frac{4}{3}$$

よって　**AR：RC＝4：3**

(4)　△ABC の面積を S とすると，右図より



$\triangle\mathrm{ABP}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot S=\dfrac{4}{9}S$

$\triangle\mathrm{BCP}=\dfrac{1}{3}S$

$\triangle\mathrm{CAP}=\left(1-\dfrac{4}{9}-\dfrac{1}{3}\right)S=\dfrac{2}{9}S$

したがって四面体 OABP，OBCP，OCAP の体積をそれぞれ V_1，V_2，V_3 とすると

$V_1 : V_2 : V_3=\triangle\mathrm{ABP} : \triangle\mathrm{BCP} : \triangle\mathrm{CAP}=\dfrac{4}{9}S : \dfrac{1}{3}S : \dfrac{2}{9}S=\mathbf{4 : 3 : 2}$

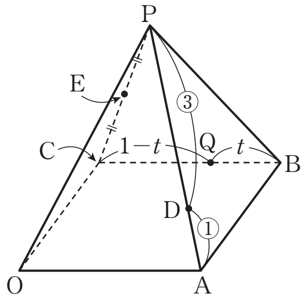
$\boxed{2}$　1辺の長さが1の正方形 OABC を底面とし，OP＝AP＝BP＝CP を満たす点 P を頂点とする四角錐 POABC がある．辺 AP を 1：3 に内分する点を D，辺 CP の中点を E，辺 BC を t：$(1-t)$ に内分する点を Q とする．

(1)　ベクトル $\overrightarrow{OD}$ と $\overrightarrow{OE}$ を，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OP}$ を用いて表せ．

(2)　ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ を，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OP}$ と t を用いて表せ．

(3)　内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$ の値を求めよ．

(4)　直線 PQ が平面 ODE に垂直であるとき，t の値および線分 OP の長さを求めよ．



(1)　$\boldsymbol{\overrightarrow{OD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OP}}$　　$\boldsymbol{\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OP}}$

(2)　$\boldsymbol{\overrightarrow{PQ}}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+(1-t)\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{OP}$

$=\boldsymbol{(1-t)\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}}$

(3)　線分 OA の中点を M とすると，

△POA は二等辺三角形より　OM⊥PM

よって　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|\cos\angle POA$

$=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OM}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|^2=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(4)　(3)同様，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}$　　また　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$

PQ⊥平面 ODE より　$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{OD}$ かつ $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{OE}$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OD}=\{(1-t)\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}\}\cdot\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OP}\right)=0$

$3(1-t)|\overrightarrow{OA}|^2+(1-t)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}+3\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}-3\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}-|\overrightarrow{OP}|^2=0$

$3(1-t)+\frac{1}{2}(1-t)+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}-|\overrightarrow{OP}|^2=0$　　よって　$|\overrightarrow{OP}|^2=-\frac{7}{2}t+\frac{5}{2}$　……①

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OE}=\{(1-t)\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}\}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OP}\right)=0$

$(1-t)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+(1-t)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}+|\overrightarrow{OC}|^2+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}-|\overrightarrow{OP}|^2=0$

$\frac{1}{2}(1-t)+1-|\overrightarrow{OP}|^2=0$　　よって　$|\overrightarrow{OP}|^2=-\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}$　……②

①，②より　$-\frac{7}{2}t+\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}$　　したがって　$t=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$

このとき　①より　$|\overrightarrow{OP}|^2=\frac{4}{3}$　　ゆえに　$|\overrightarrow{OP}|=\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{3}}}$

$\boxed{3}$　座標空間の2点 $A(1,\ -2,\ -1)$，$B(4,\ 2,\ 4)$ を通る直線 l_1 上にあり，原点までの距離が34の点をC（Cの x 座標は正とする），点Aを通り方向ベクトル $\vec{h}=(4,\ -3,\ -5)$ をもつ直線を l_2 とする．

(1)　Cの座標を求めよ．

(2)　Cと直線 l_2 を含む平面において，l_2 に関してCと対称な点Dの座標を求めよ．

(1)　直線 l_1 上の点Cは，実数 t を用いて次のように表せる．

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=(1,\ -2,\ -1)+t(3,\ 4,\ 5)=(3t+1,\ 4t-2,\ 5t-1)$

$|\overrightarrow{OC}|=34$　より　$(3t+1)^2+(4t-2)^2+(5t-1)^2=34^2$

$5t^2-2t-115=0$　　$(5t+23)(t-5)=0$

点Cの x 座標は正より $t=5$　　よって　**C(16，18，24)**

(2)　線分CDの中点をMとすると，点Mは直線 l_2 上にある．

よって点Mは，実数 s を用いて次のように表せる．

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+s\vec{h}=(4s+1,\ -3s-2,\ -5s-1)$

点Dの座標を $(x,\ y,\ z)$ とすると，

$\dfrac{x+16}{2}=4s+1$，$\dfrac{y+18}{2}=-3s-2$，$\dfrac{z+24}{2}=-5s-1$

よって　$x=8s-14$，$y=-6s-22$，$z=-10s-26$

また，$\overrightarrow{CD}\perp l_2$ より　$\overrightarrow{CD}\cdot\vec{h}=0$

$\overrightarrow{CD}=(x-16,\ y-18,\ z-24)=(8s-30,\ -6s-40,\ -10s-50)$　より

$4(8s-30)-3(-6s-40)-5(-10s-50)=0$　　$100s+250=0$　　よって　$s=-\dfrac{5}{2}$

したがって　**D(−34，−7，−1)**

第 39 講　論証，証明

$\boxed{1}$ x，y が実数であるとき，次の文中の空欄に当てはまるものを，下の 1，2，3，4 から 1 つ選べ.

(i) 「$x+y>0$ かつ $xy>0$」は，「$x>0$ かつ $y>0$」であるための $\boxed{\text{ア}}$.

(ii) 「$x+y>2$ または $x+y<-2$」は，「$x>1$ かつ $y>1$」であるための $\boxed{\text{イ}}$.

(iii) 「$|x|<1$ かつ $|y|<1$」は，「$xy+1>x+y$」であるための $\boxed{\text{ウ}}$.

(iv) 「$y \leqq x^2$」は，「$y \leqq x$」であるための $\boxed{\text{エ}}$.

(v) 「$x^2+y^2<2$」は，「$|x|+|y|<2$」であるための $\boxed{\text{オ}}$.

1. 必要十分条件である
2. 必要条件であるが，十分条件ではない
3. 十分条件であるが，必要条件ではない
4. 必要条件でも十分条件でもない

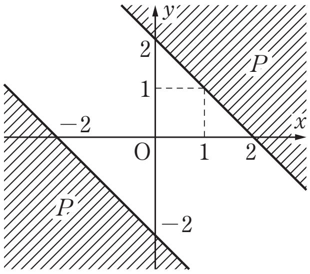
(i) $xy>0$ のとき $x>0$ かつ $y>0$　　または　$x<0$ かつ $y<0$

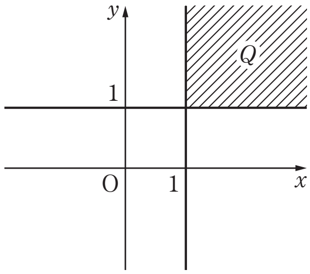
よって「$xy>0$ かつ $x+y>0$」は「$x>0$ かつ $y>0$」と同値である.

したがって　**1**（必要十分条件である）

(ii) $x+y>2$ または $x+y<-2$　⇔　$y>-x+2$ または $y<-x-2$

よって，$P=\{(x,\ y) \mid x+y>2$ または $x+y<-2\}$，$Q=\{(x,\ y) \mid x>1,\ y>1\}$ を満たす点 $(x,\ y)$ の領域は下図斜線部分（境界含まず）



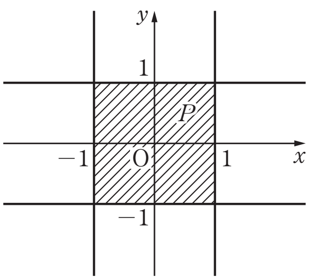


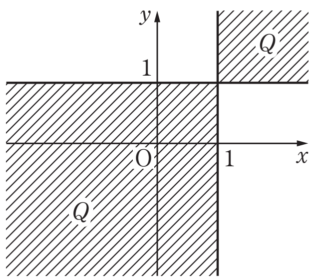
したがって　$Q \subset P$ より　**2**（必要条件であるが，十分条件ではない）

(iii) $xy+1>x+y$　より　$xy-x-y+1>0$　　$(x-1)(y-1)>0$

よって　$x>1$，$y>1$ または $x<1$，$y<1$

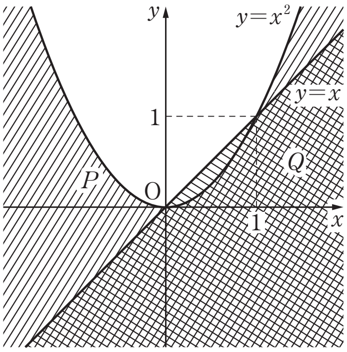
したがって，$P=\{(x,\ y) \mid |x|<1,\ |y|<1\}$，$Q=\{(x,\ y) \mid xy+1>x+y\}$ を満たす点 $(x,\ y)$ の領域は下図斜線部分（境界含まず）





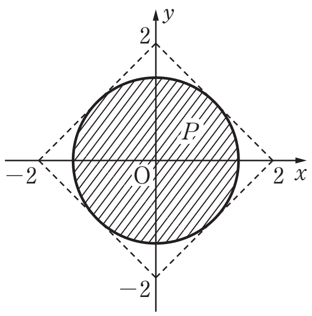
したがって　$P \subset Q$ より　**3**　（十分条件であるが，必要条件ではない）

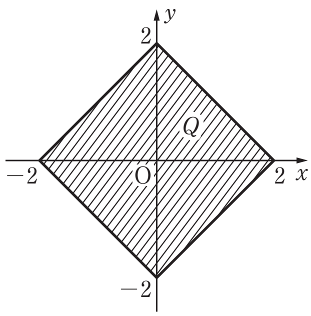
(iv)　$P=\{(x,\ y)\,|\,y \leqq x^2\}$，$Q=\{(x,\ y)\,|\,y \leqq x\}$ を満たす点 $(x,\ y)$ の領域は下図斜線部分（境界を含む）



したがって　**4**（必要条件でも十分条件でもない）

(v)　$P=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2<2\}$，$Q=\{(x,\ y)\,|\,|x|+|y|<2\}$ を満たす点 $(x,\ y)$ の領域は下図斜線部分（境界含まず）





したがって　$P \subset Q$ より　**3**（十分条件であるが，必要条件ではない）

2 (1) n は0または正の整数とする．二項定理を用いて

$${}_n\mathrm{C}_0+3\cdot{}_n\mathrm{C}_1+3^2\cdot{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+3^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n=4^n$$ を示せ．

(2) n を自然数とする．$3^n+5^n=8^n$ となるのは $n=1$ のときだけであることを示せ．

(1) $4^n=(1+3)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\cdot3+{}_n\mathrm{C}_2\cdot3^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\cdot3^n$

$={}_n\mathrm{C}_0+3\cdot{}_n\mathrm{C}_1+3^2\cdot{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+3^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n$　よって示された．

(2) $3^n+5^n=8^n$　……①　について

$n=1$ のとき　(左辺)$=3^1+5^1=8$　(右辺)$=8^1=8$　より　①は成立

$n\geqq2$ のとき

$$8^n=(3+5)^n={}_n\mathrm{C}_0\cdot3^n+{}_n\mathrm{C}_1\cdot3^{n-1}\cdot5+{}_n\mathrm{C}_2\cdot3^{n-2}\cdot5^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\cdot3\cdot5^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n\cdot5^n$$

$$=3^n+5^n+({}_n\mathrm{C}_1\cdot3^{n-1}\cdot5+{}_n\mathrm{C}_2\cdot3^{n-2}\cdot5^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\cdot3\cdot5^{n-1})$$

$$>3^n+5^n$$

よって $n\geqq2$ のときは①は成立しない．

したがって，①が成立するのは $n=1$ のときだけである．

$\boxed{3}$ [1]　a，b，c，x，y，z はすべて正の実数である．

(1)　不等式 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$ が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つときはどのようなときか．

(2)　$a^2+b^2+c^2=25$，$x^2+y^2+z^2=36$，$ax+by+cz=30$ のとき，$\dfrac{a+b+c}{x+y+z}$ の値を求めよ．

(1)　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$

$$=(a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2)$$
$$-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2bcyz+2cazx)$$
$$=(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)+(b^2z^2-2bcyz+c^2y^2)+(c^2x^2-2caxz+a^2z^2)$$
$$=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2 \geqq 0$$

よって　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

等号成立は　$\boldsymbol{ay=bx}$ **かつ** $\boldsymbol{bz=cy}$ **かつ** $\boldsymbol{cx=az}$

a，b，c，x，y，z はすべて正より　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ のとき

(2)　$a^2+b^2+c^2=25$，$x^2+y^2+z^2=36$，$ax+by+cz=30$ のとき

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$ が成立する．

つまり(1)より　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ が成立する．

$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ とおくと $x=ka$，$y=kb$，$z=kc$

このとき　$x^2+y^2+z^2=36$　より　$k^2(a^2+b^2+c^2)=36$

$a^2+b^2+c^2=25$ より　$25k^2=36$　　$k>0$ より　$k=\dfrac{6}{5}$

したがって　$\dfrac{a+b+c}{x+y+z}=\dfrac{a+b+c}{k(a+b+c)}=\dfrac{1}{k}=\boldsymbol{\dfrac{5}{6}}$

3 ［2］ 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$，$a_2=1$，$a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$ （$n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots$）で定義する．このとき，すべての正の整数 n に対して不等式 $a_n<\left(\frac{7}{4}\right)^n$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

$a_n<\left(\frac{7}{4}\right)^n$ ……① について

［ⅰ］ $n=1$，$n=2$ のとき

$a_1=1<\frac{7}{4}$，$a_2=1<\left(\frac{7}{4}\right)^2$ より①は成立する．

［ⅱ］ $n=k$，$k+1$ のとき①が成り立つとする．

$a_k<\left(\frac{7}{4}\right)^k$，$a_{k+1}<\left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$

$$a_{k+2}=a_k+a_{k+1}<\left(\frac{7}{4}\right)^k+\left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}=\left(\frac{7}{4}\right)^k\left(1+\frac{7}{4}\right)=\left(\frac{7}{4}\right)^k\cdot\frac{11}{4}$$

ここで，$\left(\frac{7}{4}\right)^{k+2}-\left(\frac{7}{4}\right)^k\cdot\frac{11}{4}=\left(\frac{7}{4}\right)^k\left(\frac{49}{16}-\frac{44}{16}\right)>0$ より

$\left(\frac{7}{4}\right)^k\cdot\frac{11}{4}<\left(\frac{7}{4}\right)^{k+2}$ 　つまり　$a_{k+2}<\left(\frac{7}{4}\right)^{k+2}$

より①は $n=k+2$ のときも成立する．

［ⅰ］，［ⅱ］より　すべての自然数 n について①が成立する．

第40講　整数問題

> 1 ［1］　等式 $xy=2x+2y+2$ を満たす整数 x，y の組，および自然数 x，y の組をそれぞれ求めよ．ただし，$x\geqq y$ とする．

$xy=2x+2y+2$　より　$(x-2)(y-2)=6$

$x\geqq y$　より　$x-2\geqq y-2$　　また，$x-2$，$y-2$ はともに整数

よって　$(x-2,\ y-2)=(6,\ 1),\ (3,\ 2),\ (-2,\ -3),\ (-1,\ -6)$

したがって　整数 x，y の組は　$\boldsymbol{(x,\ y)=(8,\ 3),\ (5,\ 4),\ (1,\ -4),\ (0,\ -1)}$

自然数 x，y の組は　$\boldsymbol{(x,\ y)=(8,\ 3),\ (5,\ 4)}$

> 1 ［2］　(1)　k を整数とするとき，x の方程式 $x^2=k^2+12$ が整数解をもつような k の値をすべて求めよ．
>
> (2)　x の方程式 $(2a-1)x^2+(3a+2)x+a+2=0$ が少なくとも1つの整数解をもつような整数 a の値とそのときの整数解をすべて求めよ．

(1)　$x^2=k^2+12$　より　$x^2-k^2=12$　　$(x+k)(x-k)=12$

x，k が整数のとき　$(x+k)+(x-k)=2x$　より　2数 $x+k$，$x-k$ の和は偶数

よってこの2数は偶奇を共にする．

$(x+k,\ x-k)=(-2,\ -6),\ (-6,\ -2),\ (2,\ 6),\ (6,\ 2)$

$(x,\ k)=(-4,\ 2),\ (-4,\ -2),\ (4,\ -2),\ (4,\ 2)$

したがって求める k は　$\boldsymbol{k=\pm 2}$

(2)　方程式 $(2a-1)x^2+(3a+2)x+a+2=0$　……①　の判別式を D とすると

$$D=(3a+2)^2-4(2a-1)(a+2)=a^2+12$$

①が整数解をもつためには，D が平方数であることが必要である．

a が整数のとき　$a^2+12=N^2$　（N は整数）とすると，

(1)よりこれを満たす a は　$\boldsymbol{a=\pm 2}$

$a=2$ のとき

①は　$3x^2+8x+4=0$　　$(3x+2)(x+2)=0$　　$x=-\dfrac{2}{3},\ -2$

$a=-2$ のとき

①は　$-5x^2-4x=0$　　$x(5x+4)=0$　　$x=-\dfrac{4}{5},\ 0$

よっていずれも整数解をもち，適する．

以上より　**$\boldsymbol{a=2}$ のとき　整数解　$\boldsymbol{-2}$**

$\boldsymbol{a=-2}$ のとき　整数解　$\boldsymbol{0}$

2 ［1］ $5x+3y+z=15$ を満たす自然数 x，y，z の組の個数を求めよ．

$5x+3y+z=15$ ……①　において，y，z は自然数より　$3y \geqq 3$，$z \geqq 1$
x は自然数より　$5x \leqq 15-3-1=11$　　よって　$x \leqq 2$
したがって①を満たす自然数 x の値は $x=1$，2 に限られる．
$x=1$ のとき　①は　$3y+z=10$
これを満たす y，z の組は　$(y, z)=(1, 7)$，$(2, 4)$，$(3, 1)$ の 3 組
$x=2$ のとき　①は　$3y+z=5$
これを満たす y，z の組は　$(y, z)=(1, 2)$ の 1 組
以上より，①を満たす自然数 x，y，z の組の個数は　**4 個**

2 ［2］ x，y を 1 以上 100 以下の整数とする．$5x-7y=1$ を満たす (x, y) の組の個数を求めよ．

$5x-7y=1$ ……①　の解の 1 つとして $x=3$，$y=2$ が存在し，
$5\cdot3-7\cdot2=1$ ……②　である．
①－②より　$5(x-3)-7(y-2)=0$　つまり　$5(x-3)=7(y-2)$
5 と 7 は互いに素であることより，
$y-2=5k$（k は整数）とおける．このとき　$x-3=7k$
つまり　$x=7k+3$，$y=5k+2$
0 以上 100 以下の整数 x，y のうち，これらをともに満たす整数 k は
$k=0$，1，2，……，13 の 14 通り．
よって，題意を満たす (x, y) の組の個数は　**14 個**

3 [1]　m を自然数とする．m^2-1 が 8 で割り切れるための必要十分条件は，m が奇数であることを示せ．

m が奇数のとき，$m=2n-1$（n は自然数）とおくと

$$m^2-1=(2n-1)^2-1=4n^2-4n=4n(n-1)$$

$n(n-1)$ は連続する 2 つの整数の積より 2 の倍数である．

よって，m が奇数のとき m^2-1 は 8 の倍数である．

したがって，m が奇数ならば，m^2-1 は 8 で割り切れる．

また，自然数 m が奇数でないとき，m は偶数である．

このとき　$m=2n$（n は自然数）とおくと

$$m^2-1=(2n)^2-1=(2n+1)(2n-1)$$

これは連続する 2 つの奇数の積，つまり奇数であり，8 で割り切れない．

よって m が自然数のとき，m^2-1 が 8 で割り切れるならば，m は奇数である．

以上より，m^2-1 が 8 で割り切れるための必要十分条件は，m が奇数である．

3 [2]　(1)　x^4+4 を因数分解せよ．

(2)　x が正の整数であるとき，x^4+4 が素数となるのは $x=1$ のときに限ることを示せ．

(1)　$x^4+4=(x^2)^2+4=(x^2)^2+4x^2+4-4x^2$

$$=(x^2+2)^2-(2x)^2=\boldsymbol{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}$$

(2)　$x=1$ のとき

$x^4+4=1+4=5$　　これは素数である．

x が 2 以上の整数のとき

x^4+4 が素数となるためには，(1)より，x^2+2x+2，x^2-2x+2 のうち小さい方が 1 である必要がある．

x は正の整数であるから　$x^2-2x+2<x^2+2x+2$

より　$x^2-2x+2=1$ である．

$x^2-2x+1=0$　　　$(x-1)^2=0$

よって　$x=1$　　これは $x\geqq 2$ を満たさず不適．

よって，x が正の整数であるとき，x^4+4 が素数となるのは $x=1$ のときに限る．

第41講　総合問題(1)

$\boxed{1}$ [1]　自然数 n で，$\sqrt{n^2-n+20}$ の整数部分が n となるものは全部でいくつあるか．

$\sqrt{n^2-n+20}$ の整数部分が n より

$n \leqq \sqrt{n^2-n+20} < n+1$

$n^2 \leqq n^2-n+20 < (n+1)^2$

$n^2 \leqq n^2-n+20$　より　$n \leqq 20$

$n^2-n+20 < (n+1)^2$　より　$n^2-n+20 < n^2+2n+1$　　$\dfrac{19}{3} < n$

よって　$\dfrac{19}{3} < n \leqq 20$ より　$7 \leqq n \leqq 20$

したがって求める n の個数は　$20-7+1=$ **14（個）**

$\boxed{1}$ [2]　実数 a，x，y，z が

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=a^2-2a+14 \\ x^3+y^3+z^3=a^3-3a^2+3a+18 \end{cases}$$

を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1)　$xy+yz+zx$ および xyz を a の式で表せ．

(2)　x，y，z のうち少なくとも2つが等しいとき，a，x，y，z を求めよ．

(1)　$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$　より

$$\boldsymbol{xy+yz+zx}=\frac{1}{2}\{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{a^2-(a^2-2a+14)\}=\boldsymbol{a-7}$$

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$　より

$3xyz=(a^3-3a^2+3a+18)-a\cdot\{(a^2-2a+14)-(a-7)\}=-18a+18$

よって　$\boldsymbol{xyz=-6a+6}$

(2)　$x+y+z=a$，$xy+yz+zx=a-7$，$xyz=-6a+6$　より

x，y，z は t の 3 次方程式

$$t^3-at^2+(a-7)t+6a-6=0$$

の 3 解.

$$(t+2)(t-3)(t-a+1)=0$$

$$t=-2,\ 3,\ a-1$$

この 3 解のうち，少なくとも 2 つが等しい

よって　$a-1=-2$　または　$a-1=3$

つまり　$a=-1,\ 4$

$a=-1$ のとき，3 つの解は $\{-2,\ -2,\ 3\}$

$a=4$ のとき，3 つの解は $\{-2,\ 3,\ 3\}$

ゆえに

$(a,\ x,\ y,\ z)=$ $\boldsymbol{(-1,\ -2,\ -2,\ 3),\ (-1,\ -2,\ 3,\ -2),\ (-1,\ 3,\ -2,\ -2),}$
$\boldsymbol{(4,\ 3,\ 3,\ -2),\ (4,\ 3,\ -2,\ 3),\ (4,\ -2,\ 3,\ 3)}$

$\boxed{2}$ [1]　(1)　$0\leqq x\leqq 3$，$0\leqq y\leqq 3$ のとき，x，y の関数 $P=x^2+3y^2+4x-6y+2$ の最大値，最小値を求めよ．また，そのときの x，y の値を示せ.

(2)　x，y の関数 $Q=x^2-6xy+10y^2-2x+2y+2$ の最小値を求めよ．また，そのときの x，y の値を示せ.

(1)　$P=x^2+3y^2+4x-6y+2=(x+2)^2+3(y-1)^2-5$

$0\leqq x\leqq 3$，$0\leqq y\leqq 3$　より

$x=3$，$y=3$ のとき　最大値 32　　$x=0$，$y=1$ のとき　最小値 -1

(2)　$Q=x^2-6xy+10y^2-2x+2y+2$

$=x^2-2(3y+1)x+10y^2+2y+2$

$=(x-3y-1)^2-(-3y-1)^2+10y^2+2y+2$

$=(x-3y-1)^2+y^2-4y+1$

$=(x-3y-1)^2+(y-2)^2-3$

よって　$x=3y+1$ かつ $y=2$　つまり　**$x=7$，$y=2$ のとき　最小値 -3**

$\boxed{2}$ [2]　2次方程式 $2x^2-2ax+a=0$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　この方程式が実数解をもつとき，少なくとも1つの解は0以上になることを示せ．

(2)　この方程式が $0 \leqq x < \dfrac{2}{3}$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ．

(1)　2次方程式 $2x^2-2ax+a=0$ ……①　の判別式を D とすると，

①が実数解をもつのは $D \geqq 0$ のとき

$\dfrac{D}{4}=a^2-2a=a(a-2)\geqq 0$　より　$a \leqq 0,\ 2 \leqq a$

$f(x)=2x^2-2ax+a=2\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{2}+a$　とおく．

$a \leqq 0$ のとき　$f(0)=a \leqq 0$　よって①の2解のうち大きい方の解は0以上

$a \geqq 2$ のとき　$f(x)$ の軸　$x=\dfrac{a}{2}\geqq 1>0$　よって①の2解のうち大きい方の解は0以上

以上より，①が実数解をもつとき，少なくとも1つの解は0以上になる．

(2)　(1)より，$a \leqq 0,\ 2 \leqq a$ のとき，①の2解のうち少なくとも1つの解は0以上である．

$a \leqq 0$ のとき　$f(0) \leqq 0$

よって　$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{8}{9}-\dfrac{a}{3}>0$　　つまり　$a<\dfrac{8}{3}$ であればよい．

$a \leqq 0$ より　$a \leqq 0$

$a \geqq 2$ のとき　$f(x)$ の軸　$x=\dfrac{a}{2}\geqq 1$　　　$f(0)=a>0$

よって　$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{8}{9}-\dfrac{a}{3}<0$　　つまり　$a>\dfrac{8}{3}$ であればよい．

これは $a \geqq 2$ を満たす．

以上より，$\boldsymbol{a \leqq 0,\ \dfrac{8}{3}<a}$

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=\log_2(x+1)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1)　0以上の整数 k に対して，$f(x)=\dfrac{k}{2}(f(1)-f(0))$ を満たす x を k を用いて表せ．

(2)　(1)で求めた x を x_k とおく．$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(x_k-x_{k-1})$ を n を用いて表せ．

(1)　$f(x)=\log_2(x+1)$　より

$$\frac{k}{2}(f(1)-f(0))=\frac{k}{2}(\log_2 2-\log_2 1)=\frac{k}{2}$$

よって　$f(x)=\dfrac{k}{2}(f(1)-f(0))$　より　$\log_2(x+1)=\dfrac{k}{2}$　$(k\geqq 0)$

$$x+1=2^{\frac{k}{2}}$$

したがって　$\boldsymbol{x=2^{\frac{k}{2}}-1}$

(2)　(1)より　$x_k=2^{\frac{k}{2}}-1=(\sqrt{2})^k-1$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S_n}&=\sum_{k=1}^{n}k(x_k-x_{k-1})\\
&=1\cdot(x_1-x_0)+2\cdot(x_2-x_1)+3\cdot(x_3-x_2)+\cdots\cdots+(n-1)\cdot(x_{n-1}-x_{n-2})+n\cdot(x_n-x_{n-1})\\
&=-x_0+(1-2)x_1+(2-3)x_2+\cdots\cdots+\{(n-1)-n\}x_{n-1}+nx_n\\
&=-(x_0+x_1+x_2+\cdots\cdots+x_{n-1})+nx_n\\
&=-\sum_{k=0}^{n-1}\{(\sqrt{2})^k-1\}+nx_n\\
&=-\frac{1\cdot\{(\sqrt{2})^n-1\}}{\sqrt{2}-1}+n+n\{(\sqrt{2})^n-1\}\\
&=-\frac{\{(\sqrt{2})^n-1\}(\sqrt{2}+1)}{2-1}+n(\sqrt{2})^n\\
&=-(\sqrt{2})^n(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}+1)+n(\sqrt{2})^n=\boldsymbol{(n-\sqrt{2}-1)(\sqrt{2})^n+\sqrt{2}+1}
\end{aligned}$$

第42講　総合問題(2)

$\boxed{1}$ ［1］ 1，2，3，4，5の5種類の数字を，同じ数字をくり返し用いることを許して3桁の整数をつくるとき，各位の数字の和が3の倍数になる整数は何個あるか.

3桁の各位の数字の和が3の倍数となるときの数字の組合せと，その順列を考える.

和が3のとき	組合せ	(1，1，1)	順列	1通り
和が6のとき	組合せ	(1，1，4)	順列	$\dfrac{3!}{2!}=3$ 通り
		(1，2，3)	順列	$3!=6$ 通り
		(2，2，2)	順列	1通り
和が9のとき	組合せ	(1，3，5)	順列	6通り
		(1，4，4)	順列	3通り
		(2，2，5)	順列	3通り
		(2，3，4)	順列	6通り
		(3，3，3)	順列	1通り
和が12のとき	組合せ	(2，5，5)	順列	3通り
		(3，4，5)	順列	6通り
		(4，4，4)	順列	1通り
和が15のとき	組合せ	(5，5，5)	順列	1通り

以上より　**41個**

(別解)　1，2，3，4，5の数字を次の集合に分ける

3で割ると余り0になる集合　$G_0=\{3\}$

3で割ると余り1になる集合　$G_1=\{1,\ 4\}$

3で割ると余り2になる集合　$G_2=\{2,\ 5\}$

数字の和が3の倍数となる3つの数字の選び方は以下.

(i)　G_0，G_1，G_2 のいずれか1つの集合から3つの数字を選ぶ

(ii)　G_0，G_1，G_2 から1つずつ，計3つの数字を選ぶ

(i)のとき　3桁の数字の決め方は　$1^3+2^3+2^3=17$（通り）

(ii)のとき　3桁の数字の選び方は　$1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=4$（通り）

その順列は　$3!=6$（通り）　　よって　$4\times6=24$（通り）

以上より，各位の数字の和が3の倍数になる整数は　$17+24=41$（個）

> $\boxed{1}$ [2]　無作為に5人選んだとき，その中に誕生月が同じ人がいる確率を求めよ．ただし，誕生月が何月なのかは，1月から12月まですべて同じ確率とする．

無作為に5人選んだとき，それぞれの人の誕生月は12通り．

よって5人の誕生月は　12^5 通り

このうち，全員誕生月が異なるのは，1月～12月のうち5人の異なる誕生月を選ぶときで

$${}_{12}C_5 \times 5! = {}_{12}P_5 = 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8 \text{（通り）}$$

よって求める確率は　$1-\dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{12^5}=1-\dfrac{55}{144}=\boldsymbol{\dfrac{89}{144}}$

> $\boxed{2}$ [1]　$f(x)=2x^3-3x^2-6x+4$ とするとき，以下の問いに答えよ．
> (1)　多項式 $f(x)$ を x^2-x-1 で割ったときの商 $Q(x)$ と余り $R(x)$ をそれぞれ求めよ．
> (2)　関数 $f(x)$ の極値と，そのときの x の値を求めよ．

(1)

$$\begin{array}{r|l} & 2x \;-1 \\ \hline x^2-x-1 & 2x^3-3x^2-6x+4 \\ & 2x^3-2x^2-2x \\ \cline{2-2} & \quad -x^2-4x+4 \\ & \quad -x^2+x+1 \\ \cline{2-2} & \qquad -5x+3 \end{array}$$

よって　$\boldsymbol{Q(x)=2x-1}$　　$\boldsymbol{R(x)=-5x+3}$

(2)　$f(x)=2x^3-3x^2-6x+4$　より

$f'(x)=6x^2-6x-6=6(x^2-x-1)$

$x^2-x-1=0$ つまり $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ のとき $f'(x)=0$

$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと，増減表は右表．

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗
		↑ 極大		↑ 極小	

(1)より　$f(x)=(x^2-x-1)Q(x)+R(x)$

$f(\alpha)=R(\alpha)=-5\alpha+3=-5\cdot\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}+3=\dfrac{1+5\sqrt{5}}{2}$

$f(\beta)=R(\beta)=-5\beta+3=-5\cdot\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+3=\dfrac{1-5\sqrt{5}}{2}$

よって　$f(x)$ は

極大値　$\boldsymbol{\dfrac{1+5\sqrt{5}}{2}}$　$\left(\boldsymbol{x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}} \text{ \textbf{のとき}}\right)$

極小値　$\boldsymbol{\dfrac{1-5\sqrt{5}}{2}}$　$\left(\boldsymbol{x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} \text{ \textbf{のとき}}\right)$　をとる．

$\boxed{2}$ ［2］ (1)　関数 $y=|x^2-1|$ のグラフをかけ．

(2)　関数 $y=||x^2-1|-3|$ のグラフをかき，そのグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1)　$y=|x^2-1|=|(x+1)(x-1)|=\begin{cases}(x+1)(x-1) & (x\leqq-1,\ 1\leqq x)\\ -(x+1)(x-1) & (-1\leqq x\leqq 1)\end{cases}$

よって　$y=|x^2-1|$ のグラフは右図1．

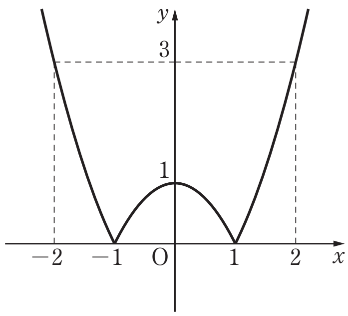


図1

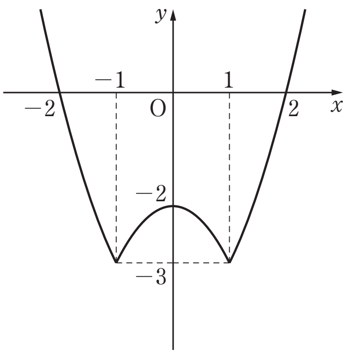
(2)　$f(x)=x^2-1$ とおく．

(1)より，$y=|f(x)|$ のグラフは，$y=f(x)$ のグラフの軸より下の部分を上に折り返したものである．

$y=|x^2-1|-3$ のグラフは，$y=|x^2-1|$ のグラフを y 軸方向に -3 平行移動したものであり（下図2），

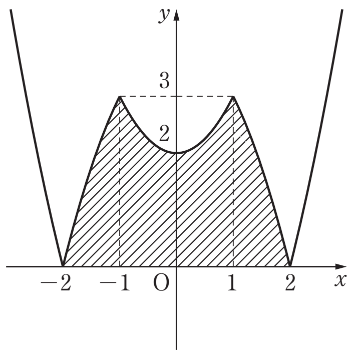
$y=||x^2-1|-3|$ のグラフは，$y=|x^2-1|-3$ のグラフの x 軸より下の部分を上に折り返したものである．

よって，面積を求める図形は下図3の斜線部分．



$y=|x^2-1|-3$

図2



$y=||x^2-1|-3|$

図3

したがって求める面積は，図1，図3より

$$S=\int_{-2}^{2}\{3-(x^2-1)\}dx-2\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx$$

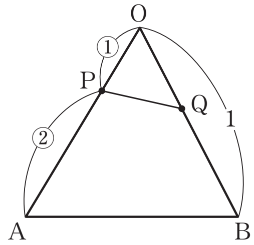
$$=-\int_{-2}^{2}(x+2)(x-2)dx+2\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\cdot 4^3\right)+2\cdot\left(-\frac{1}{6}\cdot 2^3\right)=\mathbf{8}$$

$\boxed{3}$　△OAB において，辺 OA を 1：2 に内分する点を P，辺 OB の長さを 1，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k$ とする．このとき，辺 OB 上の点 Q に関して，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と s を用いて表せ．

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ を満たす点 Q が辺 OB 上（点 Q が O または B と一致する場合を含む）にただ 1 つ存在するような k の値の範囲を求めよ．



(1)　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{s\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}}$

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$　より

$$\left|s\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=\frac{1}{9}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$$

$$s^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-\frac{2}{3}s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{9}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$$

$$=\frac{1}{9}(|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2)$$

$9s^2-6ks=1-2k$　　よって　$9s^2-6ks+2k-1=0$　……①

題意より，2 次方程式①を満たす解 s が $0\leqq s\leqq 1$ にただ 1 つ存在すればよい．

$f(s)=9s^2-6ks+2k-1=9\left(s-\dfrac{k}{3}\right)^2-k^2+2k-1$　とおく．

軸：$s=\dfrac{k}{3}$　　$f(0)=2k-1$　　$f(1)=9-6k+2k-1=-4k+8$

(i)　$f(0)\cdot f(1)<0$ のとき

$(2k-1)(-4k+8)<0$　　$(2k-1)(k-2)>0$　　よって　$k<\dfrac{1}{2}$，$2<k$

(ii)　$f(0)=0$ のとき　　$k=\dfrac{1}{2}$

このとき　①より　$9s^2-3s=0$　　$s(3s-1)=0$　　$s=0,\ \dfrac{1}{3}$

よって①は $0\leqq s\leqq 1$ に異なる 2 実数解をもち不適．

(iii)　$f(1)=0$ のとき　　$k=2$

このとき①より　$9s^2-12s+3=0$　　$(3s-1)(s-1)=0$　　$s=\dfrac{1}{3}$，1

よって①は $0\leqq s\leqq 1$ に異なる 2 実数解をもち不適．

(iv)　①の判別式 D について　$D=0$ のとき

$(3k)^2-9\cdot(2k-1)=0$　　$k^2-2k+1=0$　　$(k-1)^2=0$　　$k=1$

このとき　$f(0)=1>0$，$f(1)=4>0$，$0\leqq\dfrac{k}{3}\leqq 1$ より満たす．

(i)～(iv)より　求める k の値の範囲は　$\boldsymbol{k<\dfrac{1}{2},\ k=1,\ 2<k}$

第 43 講　総合問題(3)

$\boxed{1}$　a，b を定数とし，$a\neq 0$ とする．連立 1 次方程式 $\begin{cases} 2x+(a-1)y=b \\ ax+a^2y=1 \end{cases}$ ……(☆)

について，次の問いに答えよ．

(1)　(☆) が 2 組以上の解をもつような a と b の値を求めよ．

(2)　(☆) が $x=1$，$y=2$ をただ 1 組の解としてもつような a と b の値を求めよ．

(3)　(☆) が $x=y$ なる解をもつための a と b の値に関する必要十分条件を求めよ．

$$\begin{cases} 2x+(a-1)y=b & \cdots\cdots ① \\ ax+a^2y=1 & \cdots\cdots ② \end{cases} \quad \cdots\cdots(☆)$$

(1)　①$\times a^2-$②$\times(a-1)$ より

$a(a+1)x=a^2b-a+1$　……③　$(a\neq 0)$

$a=-1$ のとき　$0\cdot x=b+2$

よって　$b+2=0$　つまり　$b=-2$ であれば③は無数に解をもち，

このとき (☆) は 2 組以上の解をもつ．

$b\neq -2$ のとき　③は解をもたず不適．

$a\neq -1$ のとき　③はただ 1 つの解 $x=\dfrac{a^2b-a+1}{a(a+1)}$ をもち不適．

以上より　$\boldsymbol{a=-1,\ b=-2}$

(2)　①，②に $x=1$，$y=2$ を代入して

$2+2(a-1)=b$　……④　　$a+2a^2=1$　……⑤

⑤より　$(2a-1)(a+1)=0$

(1)より　$a\neq -1$　　よって　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}}$　このとき④より　$\boldsymbol{b=1}$

(3)　①，②が共通解 $x=y=\alpha$ をもつとすると

$2\alpha+(a-1)\alpha=b$，　$a\alpha+a^2\alpha=1$

つまり　$(a+1)\alpha=b$　……①′，　$a(a+1)\alpha=1$　……②′

①′$\times a-$② より　$0=ab-1$

よって①，②が共通解 $x=y=\alpha$ をもつためには $ab=1$ であることが必要．

$ab=1$ のとき，$b=\dfrac{1}{a}$　$(a\neq 0)$　　このとき③から　$a(a+1)x=1$

これが解をもつのは　$a\neq -1$ のときであり，このとき (☆) は解 $x=y=\dfrac{1}{a(a+1)}$ をもつ．

したがって，(☆) が $x=y$ なる解をもつための必要十分条件は

$\boldsymbol{ab=1}$ **かつ** $\boldsymbol{a\neq -1}$

$\boxed{2}$ ［1］　整数 x，y，z は次の連立方程式を満たす．

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=\frac{1}{xy+yz+zx} \qquad 2^{x+1}=\frac{5^{2y}}{10^{z+1}}$$

このとき，x，y，z の値を求めよ．

$2^{x+1}=\dfrac{5^{2y}}{10^{z+1}}$　より　$2^{x+1}=\dfrac{5^{2y}}{2^{z+1}\cdot 5^{z+1}}$　　　$2^{x+z+2}=5^{2y-z-1}$

x，y，z は整数より　$x+z+2=0$ かつ $2y-z-1=0$

つまり　$z=2y-1$，$x=-z-2=-2y-1$　……①

$\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}=\dfrac{1}{xy+yz+zx}$　より　$\dfrac{x+y+z}{xyz}=\dfrac{1}{(x+z)y+zx}$

$x+z=-2$　より　$\dfrac{y-2}{xyz}=\dfrac{1}{-2y+zx}$　　$(y-2)(-2y+zx)=xyz$

$-2y^2+xyz+4y-2zx=xyz$

$y^2-2y+zx=0$　これに①を代入して

$y^2-2y-(2y-1)(2y+1)=0$　　$3y^2+2y-1=0$

$(3y-1)(y+1)=0$　　よって　$y=\dfrac{1}{3}$，-1

x，y，z は整数より①から　$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(1,\ -1,\ -3)}$

$\boxed{2}$ ［2］　方程式 $(\log_4 x)^2 = \log_4 \dfrac{x^2}{2}$ の 2 つの解を α，β（ただし $\alpha > \beta$）とする．

(1)　積 $\alpha\beta$ の値を求めよ．

(2)　$(\log_4 \alpha - \log_4 \beta)^2$ の値を求めよ．

(3)　$\dfrac{\alpha}{\beta} < 8$ を示せ．

(1)　$(\log_4 x)^2 = \log_4 \dfrac{x^2}{2}$　……①　について，真数は正より　$x > 0$

このとき①より　$(\log_4 x)^2 = 2\log_4 x - \log_4 2$

$\log_4 x = t$　とおくと，$t^2 = 2t - \dfrac{\log_2 2}{\log_2 4}$　　つまり　$2t^2 - 4t + 1 = 0$　……②

方程式①の 2 解が $x = \alpha$，β より，

t の方程式の 2 解は　$t = \log_4 \alpha$，$\log_4 \beta$

よって，解と係数の関係より

$\log_4 \alpha + \log_4 \beta = 2$　……③，$(\log_4 \alpha)(\log_4 \beta) = \dfrac{1}{2}$　……④

③より　$\log_4 \alpha\beta = 2$　　よって　$\boldsymbol{\alpha\beta = 4^2 = 16}$

(2)　$\boldsymbol{(\log_4 \alpha - \log_4 \beta)^2} = (\log_4 \alpha + \log_4 \beta)^2 - 4(\log_4 \alpha)(\log_4 \beta)$

$$= 2^2 - 4 \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{2}$$

(3)　$\alpha > \beta$ より　$\log_4 \alpha > \log_4 \beta$

よって(2)より　$\log_4 \alpha - \log_4 \beta = \sqrt{2}$　(>0)

つまり　$\log_4 \dfrac{\alpha}{\beta} = \sqrt{2}$　より　$\dfrac{\alpha}{\beta} = 4^{\sqrt{2}} < 4^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$　　したがって　$\dfrac{\alpha}{\beta} < 8$

$\boxed{3}$ 座標平面上で $y=-ax+a$ $(a>0)$ で表される直線を l，$y=a^3x$ で表される直線を m とし，2 直線の交点を $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ とする．$0<x<x_1$ の範囲で，直線 l 上の点 B，直線 m 上の点 C が移動し，点 B，C および y 軸上の点 D，E を頂点とする長方形 BCDE の面積を S とする．

(1) a を一定とした場合，S がとりうる最大値を a を用いて表せ．

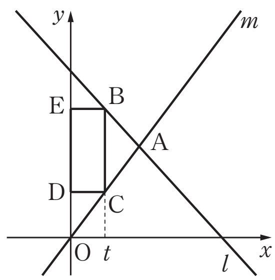
(2) a が $a>0$ を満たしながら変化するとき，S の最大値と，そのときの a の値を求めよ．

(1) $l:y=-ax+a=-a(x-1)$ と $m:y=a^3x$ $(a>0)$ より

$$-ax+a=a^3x \qquad -x+1=a^2x \qquad (a^2+1)x=1 \qquad x=\frac{1}{a^2+1}$$

よって 2 直線 l，m の交点 A の x 座標は　$x_1=\dfrac{1}{a^2+1}$

右図において，2 点 B，C の x 座標を t とすると



$0<t<\dfrac{1}{a^2+1}$

このとき点 B，C の y 座標はそれぞれ $-at+a$，a^3t　より

$$\begin{aligned}S&=\{(-at+a)-a^3t\}\cdot t\\&=-a(a^2+1)t^2+at\\&=-a(a^2+1)\left\{t-\frac{1}{2(a^2+1)}\right\}^2+\frac{a}{4(a^2+1)}\end{aligned}$$

$0<t<\dfrac{1}{a^2+1}$ における S の最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{a}{4(a^2+1)}}$　$\left(t=\dfrac{1}{2(a^2+1)}\ のとき\right)$

(2) $S=\dfrac{a}{4(a^2+1)}$ (>0) が最大になるのは $\dfrac{4(a^2+1)}{a}$ が最小となるときである．

$a>0$ より，(相加平均)$\geqq$(相乗平均) の関係から

$$\frac{4(a^2+1)}{a}=4\left(a+\frac{1}{a}\right)\geqq 4\cdot 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=8$$

等号成立は　$a=\dfrac{1}{a}$　つまり　$a=1$ のとき

よって　$\boldsymbol{a=1}$ のとき $\dfrac{4(a^2+1)}{a}$ は最小値 8 をとり，

このとき　S は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$ をとる．

第44講　総合問題(4)

$\boxed{1}$　△ABCにおいて，$a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{AC}$，$c=\mathrm{AB}$とし，$\theta=\angle\mathrm{ACB}$とおく．いま，$a+b=10$，$c=2\sqrt{7}$で，△ABCの面積が$6\sqrt{3}$であるとする．このとき，余弦定理から$c^2=(a+b)^2-\boxed{\text{ア}}\,ab(1+\cos\theta)$となるので

$ab(1+\cos\theta)=\boxed{\text{イウ}}$である．一方で△ABCの面積が$6\sqrt{3}$であるから

$ab(1+\cos\theta)=\sqrt{\boxed{\text{エ}}}\,ab\sin\theta$　すなわち，$1+\cos\theta=\sqrt{\boxed{\text{エ}}}\sin\theta$である．

この両辺を2乗して式を整理すれば，$1+\cos\theta=\boxed{\text{オ}}-\boxed{\text{オ}}\cos\theta$となり，

$\cos\theta=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$と求まる．

従って　$a<b$とすれば，$a=\boxed{\text{コ}}$，$b=\boxed{\text{サ}}$である．また，△ABCの外接円の面積は，$\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}\pi$となる．

余弦定理より

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$

$\quad=(a+b)^2-2ab-2ab\cos\theta=(a+b)^2-\mathbf{2}ab(1+\cos\theta)$

$c=2\sqrt{7}$，$a+b=10$より

$28=10^2-2ab(1+\cos\theta)$　　よって　$ab(1+\cos\theta)=\mathbf{36}$　……①

また，△ABCの面積が$6\sqrt{3}$より　$\dfrac{1}{2}ab\sin\theta=6\sqrt{3}$

$ab\sin\theta=12\sqrt{3}$　　よって　$\sqrt{3}\,ab\sin\theta=36$　……②

①，②より　$ab(1+\cos\theta)=\sqrt{\mathbf{3}}\,ab\sin\theta$　　すなわち　$1+\cos\theta=\sqrt{3}\sin\theta$

この両辺を2乗して$(1+\cos\theta)^2=3\sin^2\theta$　　$(1+\cos\theta)^2=3(1-\cos^2\theta)$

$(1+\cos\theta)^2=3(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)$　　$\cos\theta\neq-1$より　$1+\cos\theta=3(1-\cos\theta)$

よって　$1+\cos\theta=\mathbf{3}-3\cos\theta$　より　$\cos\theta=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$

このとき①より　$ab=24$　　これと$a+b=10$　より

a，bは2次方程式$t^2-10t+24=0$の2解である

$(t-4)(t-6)=0$　　$t=4,\ 6$　　$a<b$　より　$a=\mathbf{4}$，$b=\mathbf{6}$

また，△ABCの外接円の半径をRとすると，正弦定理より

$\dfrac{c}{\sin\theta}=2R$　　よって　$R=\dfrac{2\sqrt{7}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

したがって外接円の面積は　$\pi R^2=\dfrac{\mathbf{28}}{\mathbf{3}}\pi$

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+2x$ について次の問いに答えよ.

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ.

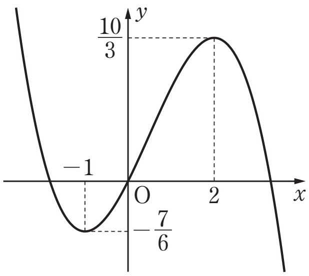
(2) 実数 a に対して，$a \leqq x \leqq a+2$ のときの $f(x)$ の最小値を $g(a)$ とおく．関数 $b=g(a)$ のグラフの概形を ab 平面上にかけ.

(1) $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+2x$ 　より

$f'(x)=-x^2+x+2=-(x+1)(x-2)$

よって $f(x)$ の増減表は下表．$y=f(x)$ のグラフは右図.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{7}{6}$	$\nearrow$	$\dfrac{10}{3}$	$\searrow$



(2) $a<2<a+2$ 　つまり　$0<a<2$ のときに

$f(a)=f(a+2)$ となるのは

$$-\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}a^2+2a=-\frac{1}{3}(a+2)^3+\frac{1}{2}(a+2)^2+2(a+2)$$

$3a^2+3a-5=0$ 　　$a=\dfrac{-3\pm\sqrt{69}}{6}$ 　　つまり　$a=\dfrac{-3+\sqrt{69}}{6}$ のとき

(i) $a+2<-1$ 　つまり　$a<-3$ のとき

$g(a)=f(a+2)$

(ii) $a \leqq -1 \leqq a+2$ 　つまり　$-3 \leqq a \leqq -1$ のとき

$g(a)=f(-1)=-\dfrac{7}{6}$

(iii) $-1<a<\dfrac{-3+\sqrt{69}}{6}$ のとき

$g(a)=f(a)$

(iv) $\dfrac{-3+\sqrt{69}}{6} \leqq a$ のとき

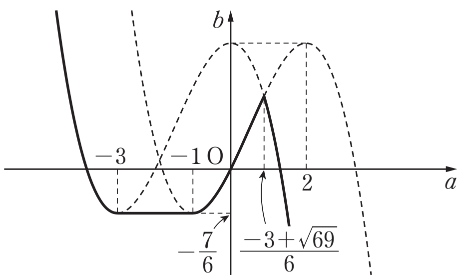
$g(a)=f(a+2)$

ここで $b=f(a+2)$ のグラフは

$b=f(a)$ のグラフを a 軸方向に -2

平行移動したものより，(1)から

$b=g(a)$ のグラフは右図.



$\boxed{3}$ [1]　不等式 $0 \leqq x \leqq 60$ と $0 \leqq y \leqq x+2$ を同時に満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ．

$x=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 60$ 上にある格子点の個数を数えることにより，
求める個数は

$$3+4+5+\cdots\cdots+63=\frac{61(3+63)}{2}=\mathbf{2013}\ \textbf{(個)}$$

(別解)　$x=k$（k は $0 \leqq k \leqq 60$ を満たす整数）上にある格子点の個数は

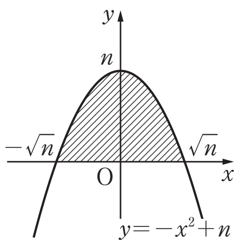
$$(k+2)-0+1=k+3$$

よって求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{60}(k+3)=\frac{61(3+63)}{2}=2013$$

$\boxed{3}$ [2]　xy 平面上において，不等式 $0 \leqq y \leqq -x^2+n$（n は自然数）を満たす格子点（x 座標，y 座標がともに整数である点）の個数を a_n とする．自然数 s に対して，a_{s^2} を s の式で表せ．

$0 \leqq y \leqq -x^2+n$ の表す領域は右図斜線部（境界含む）．
自然数 s について，$n=s^2$ のとき，$\sqrt{n}=s$
$x=k$（k は $0 \leqq k \leqq s$ を満たす整数）上にある格子点の
個数は　$(-k^2+n)-0+1=-k^2+(s^2+1)$
図形の対称性を考慮して



$$\boldsymbol{a_{s^2}}=(s^2+1)+2\sum_{k=1}^{s}\{-k^2+(s^2+1)\}$$

$$=s^2+1+2\left\{-\frac{1}{6}s(s+1)(2s+1)+(s^2+1)\cdot s\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{4}{3}s^3+\frac{5}{3}s+1}$$

第45講　総合問題(5)

1　6つの面にそれぞれ0，0，1，-1，i，$-i$と書かれたさいころがある．ここでiは虚数単位である．このさいころを3回投げ，1回目に出た目の値をX_1，2回目に出た目の値をX_2，3回目に出た目の値をX_3とする．

(1)　積X_1X_2が実数となる確率を求めよ．

(2)　和X_1+X_2が実数となる確率を求めよ．

(3)　積$X_1X_2X_3$が実数となる確率を求めよ．

(4)　積$X_1X_2X_3$が0となる確率を求めよ．

(1)　積X_1X_2が実数となる場合を，以下に分けて考える．

(i)　X_1，X_2のいずれかに0が含まれるとき　　(ii)　X_1，X_2ともに0でないとき

(i)のとき

X_1，X_2ともに0が含まれないことの余事象を考えて，その確率は　$1-\left(\dfrac{4}{6}\right)^2=\dfrac{5}{9}$

(ii)のとき

X_1，X_2がともに実数，またはともに虚数のときで，その確率は　$\left(\dfrac{2}{6}\right)^2+\left(\dfrac{2}{6}\right)^2=\dfrac{2}{9}$

(i)，(ii)より求める確率は　$\dfrac{5}{9}+\dfrac{2}{9}=\boldsymbol{\dfrac{7}{9}}$

(2)　和X_1+X_2が実数となるのは，ともに実数，またはiと$-i$の両方が出る場合で

その確率は　$\left(\dfrac{4}{6}\right)^2+2!\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{18}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(3)　積$X_1X_2X_3$が実数となる場合を，以下に分けて考える．

(i)　積X_1X_2が0のとき　　(ii)　積X_1X_2が0以外の実数のとき

(iii)　積X_1X_2が虚数のとき

(i)のとき　(1)よりその確率は　$\dfrac{5}{9}$　　このときX_3は任意　　よって　$\dfrac{5}{9}\times1=\dfrac{5}{9}$

(ii)のとき

(1)よりその確率は　$\dfrac{2}{9}$　　このときX_3は実数であればよい　　よって　$\dfrac{2}{9}\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{4}{27}$

(iii)のとき

(1)の余事象より，その確率は　$\dfrac{2}{9}$　　このときX_3は0または虚数であればよい

よって　$\dfrac{2}{9}\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{4}{27}$

(i)〜(iii)より　求める確率は　$\dfrac{5}{9}+\dfrac{4}{27}+\dfrac{4}{27}=\boldsymbol{\dfrac{23}{27}}$

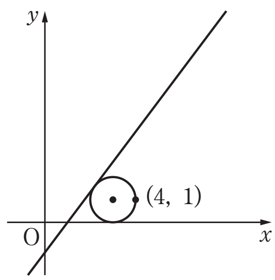
(4)　積$X_1X_2X_3$が0になるのは，積X_1X_2が0，または積X_1X_2が0以外でX_3が0のとき

よって求める確率は　$\dfrac{5}{9}\times1+\dfrac{4}{9}\times\dfrac{2}{6}=\boldsymbol{\dfrac{19}{27}}$

$\boxed{2}$ [1]　直線 $4x-3y=4$ と x 軸に接して，点 $(4,\ 1)$ を通る円のうち，半径が最小となる円の方程式を求めよ．

求める円の中心を $(a,\ b)$ とすると，$(a,\ b)$ は2直線 $4x-3y-4=0$ と $y=0$ から等距離にある．よって　$\dfrac{|4a-3b-4|}{\sqrt{16+9}}=|b|$

図より $(a,\ b)$ は $4x-3y-4>0$，$y>0$ を満たす領域にあるので，$4a-3b-4>0$，$b>0$



よって　$\dfrac{4a-3b-4}{5}=b$　　つまり　$a=2b+1$

また，半径は b であることより，求める円の方程式は

$(x-2b-1)^2+(y-b)^2=b^2$ $(b>0)$　とおける．

この円が $(4,\ 1)$ を通るので　$(3-2b)^2+(1-b)^2=b^2$

$$2b^2-7b+5=0 \qquad (2b-5)(b-1)=0 \qquad b=\frac{5}{2},\ 1$$

このうち半径が小さいのは $b=1$ のとき．

よって求める円の方程式は　$\boldsymbol{(x-3)^2+(y-1)^2=1}$

$\boxed{2}$ [2]　原点Oを中心とする半径2の円に，点P$(4,\ 0)$ から引いた2つの接線の接点のうち，第1象限にある点をA，残りの点をBとする．直線ABが x 軸と交わる点をCとする．Cから直線APに引いた垂線とAPの交点をDとする．

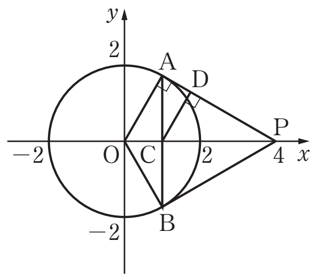
(1)　線分APの長さを求めよ．　　(2)　線分CDの長さを求めよ．

(3)　3点P，C，Dを通る円の方程式を求めよ．

(1)　△PAOは∠PAO$=90^\circ$，OA：OP$=2:4=1:2$ の直角三角形より

OA：AP$=1:\sqrt{3}$　　したがって　**AP**$\boldsymbol{=\sqrt{3}}$OA$\boldsymbol{=2\sqrt{3}}$

(2)　(1)より ∠AOP$=60^\circ$　　よって直角三角形AOCで



OC$=\dfrac{1}{2}$OA$=1$

これと△PAO∽△PDCより　OA：CD＝OP：CP

つまり　2：CD$=4:3$　　ゆえに　**CD**$\boldsymbol{=\dfrac{3}{2}}$

(3)　求める円は，直角三角形PDCの外接円である．

よってその中心は，線分CPの中点であり，その座標は $\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$　半径は $\dfrac{1}{2}$CP$=\dfrac{3}{2}$

したがって求める円の方程式は　$\boldsymbol{\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{9}{4}}$

$\boxed{3}$ 自然数 m，n において，その最大公約数は 23 とする．ただし，$m<n$ とする．

(1) $n=230$ であるとき，m のとりうる値は $\boxed{\text{ア}}$ 個あり，その中で最小のものは $\boxed{\text{イ}}$，最大のものは $\boxed{\text{ウ}}$ である．m が最大のとき，m と n の最小公倍数は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(2) $mn=11109$ であるとき，m と n の最小公倍数は $\boxed{\text{オ}}$ である．

(3) $mn<7935$ であるとき，mn のとりうる値で最大のものは $\boxed{\text{カ}}$ である．

(4) $m+n=1150$ であるとき，mn のとりうる値で最大のものは $\boxed{\text{キ}}$ である．

m，n の最大公約数が 23 であることより

$m=23m'$，$n=23n'$（m'，n' は互いに素の自然数）とおける．

(1) $n=230$ のとき　$230=23n'$　より　$n'=10=2\times5$

$m<n$ より $m'<n'$ であり，m'，n' は互いに素であることから

m' は 1，3，7，9 に限られる．

よって m のとりうる値は **4** 個あり，その中で最小のものは　$m=23\times1=\mathbf{23}$

また，最大のものは $m=23\times9=\mathbf{207}$ であり，このとき m と n の最小公倍数は

$23\times10\times9=\mathbf{2070}$

(2) $mn=11109$　より　$23m'\times23n'=23^2\times21$　よって　$m'n'=21$

$m'n'=21$ かつ $m'<n'$ を満たす互いに素な自然数 m'，n' は確かに存在する．

よって m と n の最小公倍数は　$23m'n'=23\times21=\mathbf{483}$

(3) $mn<7935=23^2\times15$　より　$m'n'<15$

$m'n'<15$ かつ $m'<n'$ を満たす互いに素な自然数 m'，n' のうち

$m'n'$ が最大となるのは　$(m',\ n')=(1,\ 14),\ (2,\ 7)$ で

このとき mn は最大値　$23^2m'n'=\mathbf{7406}$ をとる．

(4) $m+n=1150$　より　$23m'+23n'=23\times50$　よって　$m'+n'=50$

このとき　$m'n'=m'(50-m')=-(m'-25)^2+625$

$m'+n'=50$　かつ　$m'<n'$　より　$1\leqq m'\leqq24$

$m'=24$ のとき　$n'=26$ であり，m'，n' が互いに素であることに反し不適．

$m'=23$ のとき　$n'=27$ であり　m'，n' は互いに素である．

このとき $m'n'$ は最大となり，mn は最大値 $23^2\times23\times27=\mathbf{328509}$ をとる．

第 46 講　総合問題(6)

$\boxed{1}$　$x>0$ の範囲で関数 $f(x)$ を $f(x)=\int_0^2(|t^2-2xt|+xt)dt$ により定めるとき，以下の問いに答えよ.

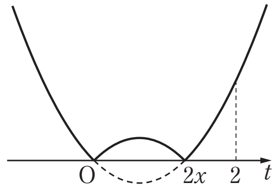
(1)　$0<x\leqq 1$ のとき，$f(x)$ を求めよ.

(2)　x が $x>0$ の範囲を動くとき，$f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ.

(3)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=4x+k$ が異なる 2 点で交わるように，定数 k の値の範囲を定めよ.

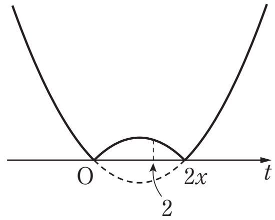
(1)　$|t^2-2xt|=|t(t-2x)|$

$0<x\leqq 1$ のとき　$0<2x\leqq 2$ より



$$\begin{aligned}\boldsymbol{f(x)}&=\int_0^2(|t^2-2xt|+xt)dt\\&=\int_0^{2x}\{-t(t-2x)+xt\}dt+\int_{2x}^2\{t(t-2x)+xt\}dt\\&=\int_0^{2x}(-t^2+3xt)dt+\int_{2x}^2(t^2-xt)dt\\&=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3x}{2}t^2\right]_0^{2x}+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{x}{2}t^2\right]_{2x}^2\\&=-\frac{8}{3}x^3+6x^3+\frac{8}{3}-2x-\left(\frac{8}{3}x^3-2x^3\right)=\boldsymbol{\frac{8}{3}x^3-2x+\frac{8}{3}}\end{aligned}$$

(2)　$x>1$ のとき　$2x>2$ より



$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^2\{-t(t-2x)+xt\}dt\\&=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3x}{2}t^2\right]_0^2=6x-\frac{8}{3}\end{aligned}$$

$0<x<1$ のとき

(1)より $f'(x)=8x^2-2=2(2x+1)(2x-1)$

また，$x>1$ のとき　$f(x)$ は単調増加する.

よって $x>0$ における $f(x)$ の増減は右表.

したがって

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$		↘		↗		↗

$f(x)$ は $\boldsymbol{x=\frac{1}{2}}$ のとき最小値 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{2}$ をとる.

(3)　$f(x)=4x+k$　より　$f(x)-4x=k$

$g(x)=f(x)-4x$ とおくと，$f(x)$ と $y=4x+k$ が異なる 2 点で交わるのは，

$y=g(x)$ と直線 $y=k$ が $x>0$ において異なる 2 点で交わるときである．

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{8}{3}x^3-6x+\dfrac{8}{3} & (0<x\leqq 1)\\ 2x-\dfrac{8}{3} & (x>1)\end{cases}$$

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$+$
$g(x)$	$\left(\dfrac{8}{3}\right)$	↘	$\dfrac{8}{3}-2\sqrt{3}$	↗		↗

$0<x<1$ のとき　$g'(x)=2(4x^2-3)$

よって $x>0$ における $g(x)$ の増減は右表．

したがって，求める k の値の範囲は　$\boldsymbol{\dfrac{8}{3}-2\sqrt{3}<k<\dfrac{8}{3}}$

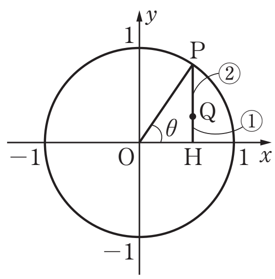
---

2 [1]　原点を O とし，円 $x^2+y^2=1$ 上の点 P から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を H，線分 PH を 2：1 に内分する点を Q とし，$\angle\mathrm{POH}=\theta$ とする．ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1)　点 Q の座標を θ で表せ．

(2)　$\angle\mathrm{QOH}=\alpha$，$\angle\mathrm{POQ}=\beta$ とおくとき，$\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を θ で表せ．

(3)　θ が変化するとき，β が最大となる θ の値を求めよ．

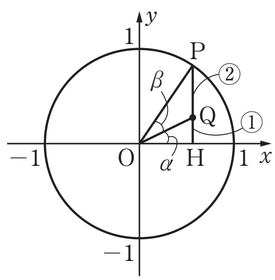


(1)　$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ より　$\boldsymbol{\mathrm{Q}\left(\cos\theta,\ \dfrac{1}{3}\sin\theta\right)}$

(2)　$\boldsymbol{\tan\alpha}=\dfrac{\mathrm{QH}}{\mathrm{OH}}=\dfrac{\frac{1}{3}\sin\theta}{\cos\theta}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\tan\theta}$

$\boldsymbol{\tan\beta}=\tan(\theta-\alpha)=\dfrac{\tan\theta-\tan\alpha}{1+\tan\theta\tan\alpha}$

$=\dfrac{\frac{2}{3}\tan\theta}{1+\frac{1}{3}\tan^2\theta}=\boldsymbol{\dfrac{2\tan\theta}{3+\tan^2\theta}}$



(3)　$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ より，β が最大になるのは $\tan\beta$ が最大に

なるとき，つまり $\dfrac{1}{\tan\beta}$ が最小となるときである．

$\tan\theta>0$ より，(相加平均)$\geqq$(相乗平均) の関係から

$$\frac{1}{\tan\beta}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^2\theta+3}{\tan\theta}=\frac{1}{2}\left(\tan\theta+\frac{3}{\tan\theta}\right)\geqq\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{\tan\theta\cdot\frac{3}{\tan\theta}}=\sqrt{3}$$

等号成立は　$\tan\theta=\dfrac{3}{\tan\theta}$　　$\tan^2\theta=3$　　$\tan\theta=\sqrt{3}$　　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

したがって β が最大となる θ の値は　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{3}}$

> $\boxed{2}$ [2]　(1)　$\log_{10}3$ は無理数であることを示せ.
> (2)　$\dfrac{6}{13}<\log_{10}3<\dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ.
> (3)　3^{26} の桁数を求めよ.

(1)　$\log_{10}3$ が有理数とすると，$\log_{10}3=\dfrac{m}{n}$（m，n は互いに素な自然数）とおける.

このとき　$10^{\frac{m}{n}}=3$　より　$10^m=3^n$

m，n が自然数より　左辺は偶数，右辺は奇数

よって，これを満たす自然数 m，n は存在せず矛盾する.

したがって　$\log_{10}3$ は無理数である

(2)　$\dfrac{6}{13}<\log_{10}3$　$\Leftrightarrow$　$6<13\log_{10}3$　$\Leftrightarrow$　$6<\log_{10}3^{13}$　$\Leftrightarrow$　$10^6<3^{13}$

$3^{13}=1594323$，$10^6=1000000$ より　$10^6<3^{13}$　　よって　$\dfrac{6}{13}<\log_{10}3$

$\log_{10}3<\dfrac{1}{2}$　$\Leftrightarrow$　$\log_{10}9<1$　$\Leftrightarrow$　$9<10$　これは成立　　よって　$\log_{10}3<\dfrac{1}{2}$

以上より　$\dfrac{6}{13}<\log_{10}3<\dfrac{1}{2}$

(3)　$\log_{10}3^{26}=26\log_{10}3$

$\dfrac{6}{13}<\log_{10}3<\dfrac{1}{2}$　より　$12<26\log_{10}3<13$

つまり　$12<\log_{10}3^{26}<13$　より　$10^{12}<3^{26}<10^{13}$

したがって　3^{26} は **13 桁**である.

3 ［1］ 次の $\boxed{}$ に当てはまる整数を答えよ．

(1) 方程式 $x^2-2x-1=0$ の2つの解を α，β とすれば　$\alpha+\beta=\boxed{ア}$，$\alpha\beta=-\boxed{イ}$ である．

(2) $a=\boxed{ウエ}$，$b=-\boxed{オカ}$ のとき x の整式 $P(x)=ax^5+bx^4+1$ は x^2-2x-1 で割り切れる．

(1) $x^2-2x-1=0$ の2解が α，β であることより，解と係数の関係から

$\alpha+\beta=\mathbf{2}$，$\alpha\beta=\mathbf{-1}$

(2) α は $x^2-2x-1=0$ の解であることより　$\alpha^2-2\alpha-1=0$　つまり　$\alpha^2=2\alpha+1$

$\alpha^4=(2\alpha+1)^2=4\alpha^2+4\alpha+1=4(2\alpha+1)+4\alpha+1=12\alpha+5$

$\alpha^5=\alpha\cdot\alpha^4=\alpha(12\alpha+5)=12\alpha^2+5\alpha=12(2\alpha+1)+5\alpha=29\alpha+12$

同様に　$\beta^4=12\beta+5$，$\beta^5=29\beta+12$

$P(x)$ が $x^2-2x-1=0$ で割り切れるとき

$P(x)=ax^5+bx^4+1=(x^2-2x-1)Q(x)$　とおける．

$P(\alpha)=a\alpha^5+b\alpha^4+1=0$　より　$a(29\alpha+12)+b(12\alpha+5)+1=0$

つまり　$(29a+12b)\alpha+12a+5b+1=0$　……①

同様に　$(29a+12b)\beta+12a+5b+1=0$　……②

①－②より　$(29a+12b)(\alpha-\beta)=0$　　$\alpha\neq\beta$ より　$29a+12b=0$　……③

このとき①より　$12a+5b+1=0$　……④

③，④より　$a=\mathbf{12}$，$b=\mathbf{-29}$

3 ［2］ 実数 a，b を係数とする2次方程式 $x^2+ax+b=0$ が異なる2つの虚数解をもつ．1つの虚数解を α とすると，他の解は $2\alpha-4+3i$ と表すことができる．このとき，a，b の値を求めよ．ただし i は虚数単位とする．

実数係数の2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解の1つ α を，$\alpha=p+qi$（p，q は実数）とおくと，もう1つの解は $p-qi$ となる．

また，$2\alpha-4+3i=2(p+qi)-4+3i=(2p-4)+(2q+3)i$

p，q は実数より　$p=2p-4$，$-q=2q+3$　　よって　$p=4$，$q=-1$

よって2解は $4\pm i$ である．

解と係数の関係より　$(4+i)+(4-i)=-a$，$(4+i)(4-i)=b$

ゆえに　$\boldsymbol{a=-8}$，$\boldsymbol{b=17}$

第47講　総合問題(7)

$\boxed{1}$　x 軸上の点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ と y 軸上の点 $\mathrm{Q}(0,\ 2)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　線分 PQ の垂直二等分線の方程式を求めよ．

(2)　点 P が x 軸上を動くとき，線分 PQ の垂直二等分線が通過する領域を求め，図示せよ．

(1)　線分 PQ の垂直二等分線は，2 点 P，Q から等距離にある点 $(x,\ y)$ の集合である．

$$(x-t)^2+y^2=x^2+(y-2)^2$$

よって　$\boldsymbol{2tx-4y-t^2+4=0}$

(2)　$2tx-4y-t^2+4=0$　より　$t^2-2xt+4y-4=0$　……①

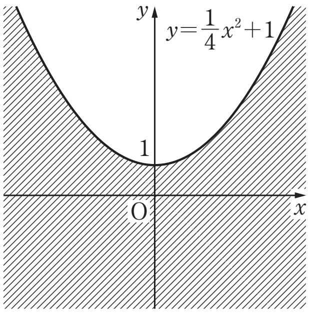
t の 2 次方程式①が実数解をもつような x，y の条件を求めればよい．

①の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=x^2-(4y-4)\geqq 0 \qquad y\leqq \frac{1}{4}x^2+1$$

これが求める領域を表す式である．

図示すると右図斜線部（境界含む）．



2　n を9以上の自然数とする．袋の中に n 個の球が入っている．このうち6個は赤球で残りは白球である．この袋から6個の球を同時に取り出すとき，3個が赤球である確率を P_n とする．

(1)　P_{10} を求めよ．

(2)　$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ を求めよ．

(3)　P_n が最大となる n を求めよ．

(1)　$n=10$ のとき，赤球6個，白球4個．

この10個の球から取り出した6個の球のうち，3個が赤球であるとき，白球は3個

赤球，白球のそれぞれの選び方は ${}_6C_3$ 通り，${}_4C_3$ 通りである．

よって　$$\boldsymbol{P_{10}}=\frac{{}_6C_3\cdot{}_4C_3}{{}_{10}C_6}=\frac{\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\cdot4}{\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}=\boldsymbol{\frac{8}{21}}$$

(2)　赤球6個，白球 $(n-6)$ 個の中から，赤球3個，白球3個選ぶときを考えて

$$P_n=\frac{{}_6C_3\cdot{}_{n-6}C_3}{{}_nC_6}\qquad よって\quad P_{n+1}=\frac{{}_6C_3\cdot{}_{(n+1)-6}C_3}{{}_{n+1}C_6}$$

したがって

$$\boldsymbol{\frac{P_{n+1}}{P_n}}=\frac{{}_6C_3\cdot{}_{n-5}C_3}{{}_{n+1}C_6}\cdot\frac{{}_nC_6}{{}_6C_3\cdot{}_{n-6}C_3}=\frac{\dfrac{(n-5)!}{3!(n-8)!}}{\dfrac{(n+1)!}{6!(n-5)!}}\cdot\frac{\dfrac{n!}{6!(n-6)!}}{\dfrac{(n-6)!}{3!(n-9)!}}$$

$$=\frac{(n-5)!}{3!(n-8)!}\cdot\frac{6!(n-5)!}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{6!(n-6)!}\cdot\frac{3!(n-9)!}{(n-6)!}$$

$$=\frac{(n-5)^2}{(n-8)(n+1)}=\boldsymbol{\frac{n^2-10n+25}{n^2-7n-8}}$$

(3)　$P_n<P_{n+1}$　つまり　$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}>1$ となるのは

$$\frac{n^2-10n+25}{n^2-7n-8}>1\quad より\quad n^2-10n+25>n^2-7n-8$$

$n<11$　　つまり　$n\leqq10$ のとき

$P_n=P_{n+1}$　つまり　$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}=1$ となるのは　$n=11$ のとき

$P_n>P_{n+1}$　つまり　$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}<1$ となるのは　$n>11$　つまり　$n\geqq12$ のとき

よって　$P_9<P_{10}<P_{11}=P_{12}>P_{13}>P_{14}>\cdots\cdots$　より　P_n が最大となる n は　$\boldsymbol{n=11,\ 12}$

$\boxed{3}$ 空間における3点A$(1,\ 1,\ -1)$，B$(3,\ 2,\ 1)$，C$(-1,\ 3,\ 0)$を通る平面をαとする．

(1) △ABCは直角二等辺三角形であることを示せ．

(2) 原点Oから平面αに垂線を下ろし，その交点をHとするとき，点Hの座標を求めよ．

(3) 四面体OABCに外接する球の中心の座標を求めよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 1,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 2,\ 1)$より

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{4+1+4}=3$　　$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{4+4+1}=3$　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-4+2+2=0$

よって，△ABCは$\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$，AB＝AC＝3の直角二等辺三角形である．

(2) H$(x,\ y,\ z)$とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(x,\ y,\ z)$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp$平面$\alpha$より　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

よって　$2x+y+2z=0$，$-2x+2y+z=0$　より　$y=2x$，$z=-2x$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(x,\ 2x,\ -2x)=x(1,\ 2,\ -2)$　より

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$の方向ベクトルの1つが$\vec{v}=(1,\ 2,\ -2)$であり

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=x\vec{v}$　……①　　また　$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$，$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$　……②

また，Hは平面α上の点より　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$と表されることから

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　……③

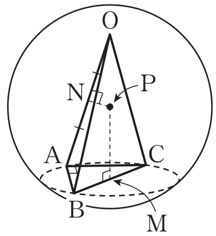
①，③より　$x\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

この式の両辺について$\vec{v}$との内積をとると

$$x\vec{v}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{v}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{v}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{v}$$

これと②より　$x|\vec{v}|^2=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{v}$　より　$x(1+4+4)=1+2+2$　　$x=\dfrac{5}{9}$

したがって　$\mathbf{H}\left(\dfrac{5}{9},\ \dfrac{10}{9},\ -\dfrac{10}{9}\right)$



(3)　求める球の中心をPとし，Pから平面 α に下ろした垂線の足をMとすると，

$\triangle\mathrm{PAM}\equiv\triangle\mathrm{PBM}\equiv\triangle\mathrm{PCM}$ より　$\mathrm{AM}=\mathrm{BM}=\mathrm{CM}$

よってMは $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心である．

また(1)より $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心は，辺BCの中点である．よってMの座標は $\left(1,\ \dfrac{5}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{MP}}=k\vec{v}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+k\vec{v}$ と表される．

また，Pから線分OAに下ろした垂線の足は，OAの中点 $\mathrm{N}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ である

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$　　　$(\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

$(\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}-k\vec{v})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$　　　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}-k\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

$\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)-\left(1+\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}\right)-k(1+2+2)=0$　　　$k=-\dfrac{3}{10}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(1,\ \dfrac{5}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{3}{10}(1,\ 2,\ -2)=\left(\dfrac{7}{10},\ \dfrac{19}{10},\ \dfrac{11}{10}\right)$　より

$\mathbf{P}\left(\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{10}},\ \dfrac{\mathbf{19}}{\mathbf{10}},\ \dfrac{\mathbf{11}}{\mathbf{10}}\right)$

第 48 講　総合問題(8)

1 (1) n を自然数とするとき，ある自然数 a，b を用いて

$$(2+\sqrt{3})^n=a+b\sqrt{3},\ (2-\sqrt{3})^n=a-b\sqrt{3}$$

とかけることを，数学的帰納法を使って示せ.

(2) (1)の a と b について，$a^2-3b^2=1$ が成り立つことを示せ.

(3) n を自然数とするとき，ある自然数 m を用いて

$$(2+\sqrt{3})^n=\sqrt{m}+\sqrt{m-1},\ (2-\sqrt{3})^n=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$$

とかけることを示せ.

以下，複号同順とする.

(1) 「n が自然数のとき　$(2\pm\sqrt{3})^n=a\pm b\sqrt{3}$ を満たす自然数 a，b が存在する」 ……(＊)

を数学的帰納法で証明する.

［Ⅰ］ $n=1$ のとき　$2\pm\sqrt{3}=a\pm b\sqrt{3}$

$a=2$，$b=1$ とすれば (＊) が成り立つ.

［Ⅱ］ $n=k$ のとき　(＊) が成り立つと仮定する

つまり　$(2\pm\sqrt{3})^k=a_k\pm b_k\sqrt{3}$ を満たす自然数 a_k，b_k が存在する.

このとき

$$(2\pm\sqrt{3})^{k+1}=(2\pm\sqrt{3})(2\pm\sqrt{3})^k=(2\pm\sqrt{3})(a_k\pm b_k\sqrt{3})$$
$$=2a_k+3b_k\pm(a_k+2b_k)\sqrt{3}$$

よって　$a_{k+1}=2a_k+3b_k$，$b_{k+1}=a_k+2b_k$ とすれば

a_{k+1}，b_{k+1} は自然数より，$n=k+1$ のときも (＊) が成り立つ.

［Ⅰ］［Ⅱ］より，すべての自然数 n について (＊) は成り立つ.

(2) (1)より　$(2+\sqrt{3})^n=a+b\sqrt{3}$，$(2-\sqrt{3})^n=a-b\sqrt{3}$

2 式を辺々かけて

$$(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n=(a+b\sqrt{3})(a-b\sqrt{3})$$

$\{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\}^n=a^2-3b^2$　　　よって　$a^2-3b^2=1$　より示された.

(3) (2)より　$3b^2=a^2-1$

このとき　$(2\pm\sqrt{3})^n=a\pm b\sqrt{3}=\sqrt{a^2}\pm\sqrt{3b^2}=\sqrt{a^2}\pm\sqrt{a^2-1}$

$a^2=m$ とおくと，m は自然数より

$(2\pm\sqrt{3})^n=\sqrt{m}\pm\sqrt{m-1}$ （m は自然数）とかけることが示された.

> $\boxed{2}$　a を定数とし，$f(x)=8^x+8^{-x}-3a(4^x+4^{-x})+3(2^x+2^{-x})$ とする．$f(x)$ を最小にする x の値と，そのときの最小値を求めよ．

$t=2^x+2^{-x}$ とおくと，$2^x>0$，$2^{-x}>0$ より（相加平均）≧（相乗平均）の関係から

$t \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}}=2$　　等号成立は　$2^x=2^{-x}$　より　$x=0$ のとき　……①

よって　$t \geqq 2$

$8^x+8^{-x}=(2^x)^3+(2^{-x})^3=(2^x+2^{-x})^3-3\cdot 2^x\cdot 2^{-x}(2^x+2^{-x})=t^3-3t$

$4^x+4^{-x}=(2^x)^2+(2^{-x})^2=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}=t^2-2$　より

$f(x)=t^3-3t-3a(t^2-2)+3t=t^3-3at^2+6a$

$g(t)=t^3-3at^2+6a$（$t \geqq 2$）とおくと，

$g'(t)=3t^2-6at=3t(t-2a)$

(i)　$2a \leqq 2$　つまり　$a \leqq 1$ のとき

$t \geqq 2$ において $g'(t) \geqq 0$ より　$g(t)$ は $t \geqq 2$ において単調増加

よって最小値は　$g(2)=-6a+8$

$t=2$ のとき　①より　$x=0$

(ii)　$a>1$ のとき

$t \geqq 2$ における $g(t)$ の増減は右表

t	2	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		↘		↗

よって最小値は　$g(2a)=-4a^3+6a$

$t=2a$ のとき　$2^x+2^{-x}=2a$　　$(2^x)^2-2a\cdot 2^x+1=0$　　$2^x=a\pm\sqrt{a^2-1}$

$a>1$ より　$a^2-1>0$　また　$a=\sqrt{a^2}>\sqrt{a^2-1}$　より　$a-\sqrt{a^2-1}>0$

よって　$x=\log_2(a\pm\sqrt{a^2-1})$

以上より

$a \leqq 1$ のとき　最小値　$\boldsymbol{-6a+8}$ **（$\boldsymbol{x=0}$ のとき）**

$a>1$ のとき　最小値　$\boldsymbol{-4a^3+6a}$ **（$\boldsymbol{x=\log_2(a\pm\sqrt{a^2-1})}$ のとき）**

$\boxed{3}$ 次の条件を満たしている正の整数 a，b，正の奇数 c の組 $(a,\ b,\ c)$ を考える．

$$2^a=(4b-c)(b+c)$$

(1) $b=13$ のとき，a，c の値を求めよ．

(2) $a \leqq 2013$ である組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を求めよ．

(1) $b=13$ のとき　$2^a=(52-c)(13+c)$

c は奇数より $52-c$ は奇数である．

また，2^a の因数のうち，奇数であるものは ±1 のみであり，$13+c>0$ であることから

$52-c=1$　　よって　$c=51$

このとき　$2^a=64$　より　$a=6$　　　以上より　$\boldsymbol{a=6,\ c=51}$

(2) $4b$ は偶数，c は奇数であることから，$4b-c$ は奇数である．

また，2^a の因数のうち，奇数であるものは ±1 のみであり，$b+c>0$ であることから

$4b-c=1$　　よって　$c=4b-1$

このとき　$2^a=5b-1$

ここで　$2^1=2$，$2^2=4$，$2^3=8$，$2^4=16$，$2^5=32$，…… より

2^a の一の位は 2，4，8，6 をこの順に繰り返す

また，$5b-1$ は 5 の倍数より 1 小さい数より，これを満たすのは 2^a の一の位が 4 のときのみである．

よって　$a=4k-2$（k は自然数）と表される．

$a \leqq 2013$　より　$1 \leqq k \leqq 503$　である．

k の値を 1 つ定めると，a，b，c の値がただ 1 つに定まる．

したがって，求める個数は　**503 個**

練習問題解答

第 25 講　数と式・方程式・不等式(1)

[1]　$x^4+4=(x^2+\boxed{\text{ア}}\,x+\boxed{\text{イ}})(x^2-\boxed{\text{ア}}\,x+\boxed{\text{イ}})$ である．

[2]　$a+b+c=-3$，$ab+bc+ca=3$ のとき，

$\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}=\boxed{\text{ウ}}$，$\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}=\boxed{\text{エ}}$ である．

[3]　互いに異なる定数 a，b，c が，$\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}$ を満たすとき，

$\dfrac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}$ の式の値を求めたい．$\dfrac{b+c}{a}=k$ ……①　とおくと，

$k=\boxed{\text{オ}}$ または $a+b+c=\boxed{\text{カ}}$ である．$k=\boxed{\text{オ}}$ は問題に適さない．また，

$a+b+c=\boxed{\text{カ}}$ のとき，①より $k=\boxed{\text{キク}}$ である．さらに

$\dfrac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}=k^{\boxed{\text{ケ}}}$ であることから，求める式の値は $\boxed{\text{コサ}}$ であることがわかる．

解答例

[1]　$x^4+4=(x^2)^2+4=(x^2)^2+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2+\mathbf{2}x+\mathbf{2})(x^2-2x+2)$

[2]　$a+1=A$，$b+1=B$，$c+1=C$ とおくと，$a=A-1$，$b=B-1$，$c=C-1$

$a+b+c=-3$　より　$A-1+B-1+C-1=-3$　　よって　$A+B+C=0$

$ab+bc+ca=3$　より

$$(A-1)(B-1)+(B-1)(C-1)+(C-1)(A-1)=3$$

$$AB+BC+CA-2(A+B+C)=0 \qquad \text{よって}\quad AB+BC+CA=0$$

ゆえに　$\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}=\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}+\dfrac{1}{C}=\dfrac{AB+BC+CA}{ABC}=\mathbf{0}$　……①

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=\frac{A-1}{A}+\frac{B-1}{B}+\frac{C-1}{C}$$

$$=1-\frac{1}{A}+1-\frac{1}{B}+1-\frac{1}{C}$$

$$=3-\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)=\mathbf{3}\quad(\text{①より})$$

[3]　$\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}=k$　とおくと　$b+c=ak$，$c+a=bk$，$a+b=ck$

これらを辺々加えて　$2(a+b+c)=k(a+b+c)$

よって　$(k-2)(a+b+c)=0$　より　　$k=\mathbf{2}$　または　$a+b+c=\mathbf{0}$

$k=2$ のとき　$b+c=2a$，$c+a=2b$　　これらより辺々をひいて c を消去すると

$b-a=2a-2b$

よって　$a=b$ より a，b が異なることに反する．

$a+b+c=0$ のとき　$k=\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{-a}{a}=\mathbf{-1}$

$$\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}=\frac{b+c}{a}\cdot\frac{c+a}{b}\cdot\frac{a+b}{c}=k^{\mathbf{3}}=\mathbf{-1}$$

第 26 講　数と式・方程式・不等式(1)

[1]　k を実数の定数とする．x，y の連立方程式 $x+y=k$，$xy=k$ が実数解をもつとき，k のとり得る値の範囲は $k \leqq$ [ア]，[イ] $\leqq k$ である．

[2]　実数を係数にもつ 3 次方程式 $x^3-x^2+ax+b=0$ が $1+2i$ を解にもつとき，$a=$ [ウ]，$b=$ [エ] である．

[3]　実数 a，x，y，z が $x+y+z=a$，$x^2+y^2+z^2=a^2-2a+14$，$xyz=-6a+6$ を満たすとき，$xy+yz+zx=a-$ [オ] である．

よって x，y，z は t の 3 次方程式 $t^3-at^2+(a-$ [オ] $)t+6a-6=0$ の 3 解である．

この 3 解のうち，少なくとも 2 つが等しいとき，$a=$ [カ]，[キク] である．

解答例

[1]　解と係数の関係から，x，y は t の 2 次方程式 $t^2-kt+k=0$ の 2 解である．

この方程式が実数解をもつ条件より　$(-k)^2-4k \geqq 0$　$k(k-4) \geqq 0$

よって　$k \leqq \mathbf{0}$，$\mathbf{4} \leqq k$

[2]　実数係数の 3 次方程式が $1+2i$ を解にもつとき，$1-2i$ も解にもつ．もう 1 つの解を α とおくと，解と係数の関係より

$(1+2i)+(1-2i)+\alpha=1$

$(1+2i)(1-2i)+(1-2i)\alpha+\alpha(1+2i)=a$

$(1+2i)(1-2i)\alpha=-b$

よって　$\alpha=-1$，$5+2\alpha=a$，$5\alpha=-b$　より　$a=\mathbf{3}$，$b=\mathbf{5}$

[3]　$x^2+y^2+z^2=a^2-2a+14$　より　$(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=a^2-2a+14$

$x+y+z=a$　……①　より　$a^2-2(xy+yz+zx)=a^2-2a+14$

よって　$xy+yz+zx=a-\mathbf{7}$　……②

また，$xyz=-6a+6$　……③

①，②，③より，x，y，z は t の 3 次方程式

$t^3-at^2+(a-7)t+6a-6=0$　……④　の 3 解である．

④を因数分解すると

$(t-3)\{t^2+(-a+3)t-2a+2\}=0$

$(t-3)(t+2)(t-a+1)=0$　よって④の 3 解は　$t=3$，-2，$a-1$

これら 3 解がすべて等しくなることはない．

よって題意を満たすのは 2 解が等しいときで，

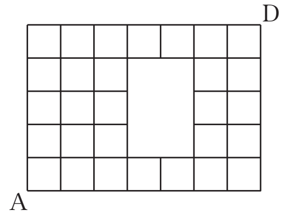
それは　$a-1=3$　または　$a-1=-2$　　つまり　$a=\mathbf{4}$，$\mathbf{-1}$ のときである．

第27講　場合の数・確率(1)

[1]　11段の階段を，一足で1段上っても2段上ってもよいとする．これ以外の上がり方は認められず，また連続して2段ずつは上れないとする．このとき，11段上る上り方は $\boxed{\text{アイ}}$ 通りある．

[2]　白5個，黒8個の碁石を一列に並べるとき，白石5個が続く並べ方は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りであり，黒石が7個以上続かないようにする並べ方は $\boxed{\text{エオカキ}}$ 通りある．

[3]　右の図のような道がある町があるとき，A地点からD地点まで行く最短経路は $\boxed{\text{クケコ}}$ 通りある．



解答例

[1]　一足で1段上がることをA，2段上がることをBとする．

Bが隣り合わないことを考慮し，11段上がるのは，

Aが11回のとき　1通り　　Aが9回，Bが1回のとき　${}_{10}C_1=10$ 通り

Aが7回，Bが2回のとき　Aの間または両端にBを入れる ${}_8C_2=28$ 通り

Aが5回，Bが3回のとき　${}_6C_3=20$ 通り　　Aが3回，Bが4回のとき　${}_4C_4=1$ 通り

したがって求める上り方は　$1+10+28+20+1=\mathbf{60}$（通り）

[2]　白石を○，黒石を●とする．

○が5個並ぶのは，○5個をひとかたまりとする順列を考えて $\dfrac{9!}{8!1!}=\mathbf{9}$（通り）

13個の石の並べ方の総数は　$\dfrac{13!}{5!8!}=1287$ 通り

このうち，●が7個以上隣り合うのは，白黒どちらでもよい場合を△とすると以下．

●●●●●●●△△△△△△　　○●●●●●●●△△△△△

△○●●●●●●●△△△△　　△△○●●●●●●●△△△

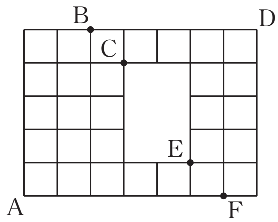
△△△○●●●●●●●△△　　△△△△○●●●●●●●△

△△△△△○●●●●●●●

それぞれについて，△のうちの1つが●であり，その選び方を考えて，

${}_6C_1+{}_5C_1\times 6=6+30=36$　　したがって求める並べ方は　$1287-36=\mathbf{1251}$（通り）

[3]　右図でA→B→Dの進み方は　$\dfrac{7!}{5!2!}\times 1=21$ 通り



A→C→Dは $\dfrac{7!}{4!3!}\times\dfrac{5!}{4!1!}=175$ 通り

A→E→Dは $\dfrac{6!}{5!1!}\times\dfrac{6!}{4!2!}=90$ 通り

A→F→Dは $1\times\dfrac{6!}{5!1!}=6$ 通り

したがって求める最短経路は　$21+175+90+6=\mathbf{292}$（通り）

第28講　場合の数・確率(2)

[1]　a, b, c, d の本が1冊ずつある．A君とB君はこれら4冊の本を1日1冊ずつ読み，A君もB君も4冊の本すべてを読むこととする．このとき，ちょうど4日間でA君もB君もすべての本を読み終わる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．

[2]　さいころを3回投げる．このとき，偶数の目がちょうど2回出るという事象を A，4以上の目が少なくとも1回は出るという事象を B とすると，事象 $A\cap B$ の起こる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である．

[3]　n を正の整数とする．1から $(2n+1)$ までの番号を1つ書いた $(2n+1)$ 枚のカードが箱の中に入っている．この箱の中からカードを1枚取り出してもとに戻すという試行を3回行い，取り出したカードの番号の中で最大のものを X とおく．このとき $X\leqq 2$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{(2n+1)^3}$，$X=2$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{(2n+1)^3}$ である．

解答例

[1]　A君，B君の本の読み方はそれぞれ $4!$ 通り．

A君が a，b，c，d の順に本を読むとすると，B君が1日目に b の本を読むとき，A君と読む本が重ならないのは b，a，d，c の順，b，c，d，a の順，b，d，a，c の順の3通りだけである．B君が1日目に c，d を読むときも同様にそれぞれ3通り．

A君が他の順番で読んだ場合も同様である．したがって求める確率は $\dfrac{4!\times3\times3}{4!\times4!}=\boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$

[2]　事象 $A\cap B$ の起こる確率を $P(A\cap B)$ と表すとすると，

求める確率は $P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap\overline{B})$ と表される．

$A\cap\overline{B}$ は「偶数の目がちょうど2回 かつ すべて3以下」という事象を表し，それは2が2回，1または3が1回出ることを表す．

したがって求める確率は　$P(A\cap B)={}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{3}{6}\right)^2\cdot\dfrac{3}{6}-{}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\cdot\dfrac{2}{6}=\dfrac{81-6}{216}=\boldsymbol{\dfrac{25}{72}}$

[3]　$X\leqq2$ となるのは，3回とも1または2を取り出したときで，

その確率は　$\left(\dfrac{2}{2n+1}\right)^3=\dfrac{\boldsymbol{8}}{(2n+1)^3}$

また，$X=1$ となるのは　3回とも1を取り出したときで，

その確率は　$\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)^3=\dfrac{1}{(2n+1)^3}$

したがって求める確率は　$\dfrac{8}{(2n+1)^3}-\dfrac{1}{(2n+1)^3}=\dfrac{\boldsymbol{7}}{(2n+1)^3}$

第 29 講　三角比・平面図形

[1]　点 O を中心とする半径 a の円 C の周上に，相異なる 3 点 A，B，P がある．弦 AB の長さを $\sqrt{3}\,a$（$a>0$）とする．点 P が直線 AB に関して点 O と同じ側にあるとき，$\angle \mathrm{APB}=\boxed{\text{アイ}}^\circ$ である．また，点 P が円 C の周上を動くとき，△PAB の面積の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}a^2$ である．

[2]　AB＝AC＝AD＝3，BC＝3，CD＝2，DB＝$\sqrt{5}$ の三角錐 ABCD において，△BCD に外接する円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{2}$ であり，この三角錐 ABCD の体積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キク}}}}{2}$ である．

解答例

[1]　正弦定理より　$\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle \mathrm{APB}}=2a$　　$\sin\angle \mathrm{APB}=\dfrac{\sqrt{3}\,a}{2a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

点 P が直線 AB に関して点 O と同じ側にあるので $0^\circ<\angle \mathrm{APB}<90^\circ$

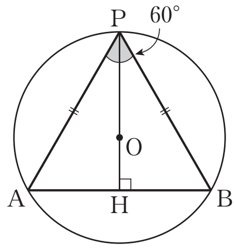
よって　$\angle \mathrm{APB}=\mathbf{60}^\circ$

点 P から直線 AB に下ろした垂線の足を H とすると，△PAB の面積が最大となるのは PH が円 C の中心 O を通るとき．

このとき対称性より　PA＝PB

よって △APB は 1 辺の長さが $\sqrt{3}\,a$ の正三角形となる．

したがって求める最大値は　$\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\,a\cdot\sqrt{3}\,a\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{\mathbf{3\sqrt{3}}}{\mathbf{4}}a^2$



[2]　$\mathrm{BC}^2=\mathrm{CD}^2+\mathrm{DB}^2$ より △BCD は ∠D＝90° の直角三角形．

よって △BCD の外接円の半径は　$\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}=\dfrac{\mathbf{3}}{2}$

また，外接円の中心を O とすると △ABC は AB＝AC＝BC＝3 の正三角形で，O は BC の中点だから，

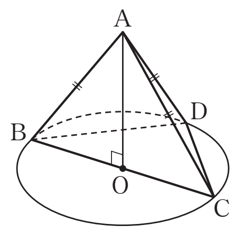
$\angle \mathrm{AOB}=\angle \mathrm{AOC}=90^\circ$，$\mathrm{AO}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

また，△AOB≡△AOC≡△AOD より ∠AOD＝90°

よって AO は三角錐 ABCD の高さである．

したがって三角錐 ABCD の体積は

$\dfrac{1}{3}\times\triangle \mathrm{BCD}\times \mathrm{AO}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{5}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{15}}}{2}$



第 30 講　関数総合(1)

［1］　$f(x)=x^2-2ax+a^2-2$ において，$0\leqq x\leqq 4$ における $f(x)$ の最大値と最小値の差が 20 となるような a の値は　$a=-\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である．

［2］　a を定数とし，$f(x)=x^2-2x+2$，$g(x)=-x^2+ax+a$ とする．$0\leqq x\leqq 1$ を満たすすべての x に対して $f(x)\geqq g(x)$ が成り立つような a の値の範囲は $a\leqq -\boxed{オ}+\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}$ である．

解答例

［1］　$f(x)=x^2-2ax+a^2-2=(x-a)^2-2$　　よって　$0\leqq x\leqq 4$ における

$f(x)$ の最小値は　$a<0$ のとき　$f(0)=a^2-2$
$0\leqq a\leqq 4$ のとき　$f(a)=-2$
$4<a$ のとき　$f(4)=a^2-8a+14$

$f(x)$ の最大値は　$a\leqq 2$ のとき　$f(4)=a^2-8a+14$
$2\leqq a$ のとき　$f(0)=a^2-2$

よって

$a<0$ のとき　$a^2-8a+14-(a^2-2)=20$　より　$a=-\dfrac{1}{2}$　これは $a<0$ を満たす

$0\leqq a\leqq 2$ のとき　$a^2-8a+14-(-2)=20$　　$a=4\pm 2\sqrt{5}$　これらはともに不適

$2\leqq a\leqq 4$ のとき　$a^2-2-(-2)=20$　　$a=\pm 2\sqrt{5}$　これらはともに不適

$4<a$ のとき　$a^2-2-(a^2-8a+14)=20$　　$a=\dfrac{9}{2}$　これは $4<a$ を満たす

以上より　$a=-\mathbf{\dfrac{1}{2}}$，$\mathbf{\dfrac{9}{2}}$

［2］　$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で $f(x)\geqq g(x)$ つまり $2x^2-(a+2)x+2-a\geqq 0$ が常に成り立つのは，

$h(x)=2x^2-(a+2)x+2-a=2\left(x-\dfrac{a+2}{4}\right)^2-\dfrac{a^2+12a-12}{8}$ とおくと，

$0\leqq x\leqq 1$ における $h(x)$ の最小値が 0 以上になるときである．

$\dfrac{a+2}{4}\leqq 0$　つまり　$a\leqq -2$ のとき　$h(0)=2-a\geqq 0$　より　$a\leqq 2$　　よって　$a\leqq -2$

$0<\dfrac{a+2}{4}<1$　つまり　$-2<a<2$ のとき　$-\dfrac{a^2+12a-12}{8}\geqq 0$

$a^2+12a-12\leqq 0$　$-6-4\sqrt{3}\leqq a\leqq -6+4\sqrt{3}$　　よって　$-2<a\leqq -6+4\sqrt{3}$

$1\leqq \dfrac{a+2}{4}$　つまり　$a\geqq 2$ のとき　$h(1)=2-2a\geqq 0$　　$a\leqq 1$

よって　$a\geqq 2$ を満たさず不適．

以上より　求める a の値は　$a\leqq -2$，$-2<a\leqq -6+4\sqrt{3}$　より　$a\leqq \mathbf{-6+4\sqrt{3}}$

第31講　関数総合(2)

［1］　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数 $y=(2\cos\theta+\sin\theta)^2$ の最大値は $\boxed{\text{ア}}$，最小値は $\boxed{\text{イ}}$ である．

［2］　a の実数とする．方程式 $\sin^2 x+2a\sin x+a-4=0$　……①　が $0 \leqq x<2\pi$ の範囲に解を1つだけもつときの a の値を求めたい．$\sin x=t$ とおくと，t のとり得る値の範囲は $-\boxed{\text{ウ}} \leqq t \leqq \boxed{\text{エ}}$ である．$-\boxed{\text{ウ}}<t<\boxed{\text{エ}}$ である t に対し，$0 \leqq x<2\pi$ を満たす x は $\boxed{\text{オ}}$ 個存在し，$t=-\boxed{\text{ウ}}$ または $t=\boxed{\text{エ}}$ に対しては $0 \leqq x<2\pi$ を満たす x は $\boxed{\text{カ}}$ 個存在する．

　したがって，方程式 $t^2+2at+a-4=0$ が $t=-\boxed{\text{ウ}}$ または $t=\boxed{\text{エ}}$ を解にもつときを考えると，$a=-\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ のときである．いずれの場合も，もう1解は $-\boxed{\text{ウ}} \leqq t \leqq \boxed{\text{エ}}$ になく題意を満たす．

解答例

［1］　$t=2\cos\theta+\sin\theta$ とおくと　$t=\sin\theta+2\cos\theta=\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$

ただし α は $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ を満たす鋭角．

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき　$\alpha \leqq \theta+\alpha \leqq \pi+\alpha$ より，t は

$\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$　つまり　$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ のとき　最大値 $\sqrt{5}$

$\theta+\alpha=\pi+\alpha$　つまり　$\theta=\pi$ のとき　最小値 -2 をとる．

このとき　$y=(2\cos\theta+\sin\theta)^2=t^2$　$(-2 \leqq t \leqq \sqrt{5})$ より

求める関数の最大値は　**5**　（$t=\sqrt{5}$ のとき）　　最小値は　**0**　（$t=0$ のとき）

［2］　$\sin x=t$ とおくと，$0 \leqq x<2\pi$ より $-\mathbf{1} \leqq t \leqq \mathbf{1}$

$-1<t<1$ である t に対して　x は $0 \leqq x<2\pi$ に **2** 個存在し，

$t=-1$ または $t=1$ に対して　x は $0 \leqq x<2\pi$ に **1** 個存在する．

よって①が $0 \leqq x<2\pi$ の範囲に解を1つだけもつのは，方程式 $t^2+2at+a-4=0$　…②の1解が $t=-1$ または $t=1$，もう1解が $-1 \leqq t \leqq 1$ にない場合である．

$t=-1$ を解にもつとき　$a=-\mathbf{3}$

このとき②は $t^2-6t-7=0$ より　もう1解は $t=7$

$t=1$ を解にもつとき　$a=\mathbf{1}$

このとき②は $t^2+2t-3=0$ より　もう1解は $t=-3$

いずれの場合も，もう1解は $-1 \leqq t \leqq 1$ になく題意を満たす．

第32講　関数総合(3)

[1]　$x=\log_{10}\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ のとき，$(10^x+10^{-x})(10^x-10^{-x})=\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ である．

[2]　t の関数 $y=\dfrac{1}{4}(4^t+4^{-t})-\dfrac{a}{2}(2^t+2^{-t}-2)+\dfrac{1}{2}$ ……① について，$x=\dfrac{2^t+2^{-t}}{2}$ とおくとき，x の最小値は $\boxed{\text{ウ}}$ であり，①は $y=x^2-\boxed{\text{エ}}x+\boxed{\text{オ}}$ と変形できる．よって，y の最小値が 0 になるときの a の値は $a=\boxed{\text{カ}}$ である．

解答例

[1]　$x=\log_{10}\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ 　より　$10^x=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

$(10^x)^2=7+4\sqrt{3}$ 　　$(10^{-x})^2=\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}}=7-4\sqrt{3}$

よって　$(10^x+10^{-x})(10^x-10^{-x})=(10^x)^2-(10^{-x})^2=7+4\sqrt{3}-(7-4\sqrt{3})=\mathbf{8\sqrt{3}}$

[2]　$2^t>0$，$2^{-t}>0$ より，相加平均と相乗平均の関係から

$x=\dfrac{1}{2}(2^t+2^{-t})\geqq\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2^t\cdot 2^{-t}}=1$

等号成立は　$2^t=2^{-t}$　より　$t=0$ のとき　　よって $x\geqq 1$　より　x の最小値は $\mathbf{1}$

また，$x^2=\dfrac{1}{4}(2^t+2^{-t})^2=\dfrac{1}{4}(4^t+2+4^{-t})=\dfrac{1}{4}(4^t+4^{-t})+\dfrac{1}{2}$　より

$x^2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}(4^t+4^{-t})$

よって①は　$y=\dfrac{1}{4}(4^t+4^{-t})-a\cdot\dfrac{2^t+2^{-t}}{2}+a+\dfrac{1}{2}=x^2-\dfrac{1}{2}-ax+a+\dfrac{1}{2}=x^2-\boldsymbol{a}x+\boldsymbol{a}$

と変形できる．$y=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+a$　$(x\geqq 1)$　より

$\dfrac{a}{2}\leqq 1$　つまり　$a\leqq 2$ のとき　$x=1$ で最小値 1

$1\leqq\dfrac{a}{2}$　つまり　$a\geqq 2$ のとき　$x=\dfrac{a}{2}$ で最小値 $-\dfrac{a^2}{4}+a$ をとる．

よって　y の最小値が 0 になるとき $-\dfrac{a^2}{4}+a=0$

$a^2-4a=0$　　$a(a-4)=0$　　$a\geqq 2$ より求める a の値は　$\mathbf{a=4}$

第 33 講　関数総合(4)

[1]　円 $x^2+y^2=4$ の外部にある点 $\mathrm{P}(a,\ 1)$ から，この円に引いた 2 本の接線が直交するときの a の値を次のように求める．x 軸に垂直な接線は条件を満たさないことから，点 P を通る円の接線を $y=m(x-a)+1$ とおくと，円の中心と直線の距離が半径と等しいことから，m は 2 次方程式 $(a^2-\boxed{\text{ア}})m^2-\boxed{\text{イ}}am-\boxed{\text{ウ}}=0$ ……①

の 2 解である．2 本の接線が直交するのは，①の 2 解の積が $\boxed{\text{エオ}}$ のときより，

$a=\pm\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ である．

[2]　放物線 $y=x^2+1$ と直線 $y=ax$ が異なる 2 点 P，Q で交わるような実数 a の値の範囲は，$a<-\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}<a$ である．線分 PQ の中点を M とすると，M は放物線 $y=\boxed{\text{ケ}}x^2$ の $x<-\boxed{\text{コ}}$，$\boxed{\text{サ}}<x$ の部分に存在する．

解答例

[1]　$y=m(x-a)+1$　　$mx-y-ma+1=0$

$$\frac{|-ma+1|}{\sqrt{m^2+1}}=2 \qquad (ma-1)^2=4(m^2+1) \qquad (a^2-\mathbf{4})m^2-\mathbf{2}am-\mathbf{3}=0 \quad \cdots\cdots①$$

①の 2 解が接線の傾きである．この 2 解の積が $\mathbf{-1}$ のとき条件を満たす．

よって解と係数の関係より

$$\frac{-3}{a^2-4}=-1 \qquad a^2-4=3 \qquad a^2=7 \qquad \text{したがって}\quad a=\pm\sqrt{\mathbf{7}}$$

[2]　$y=x^2+1$ と $y=ax$ より　$x^2+1=ax$　　$x^2-ax+1=0$ ……①

x の方程式①が異なる 2 つの実数解をもてばよい．

よって　$(-a)^2-4>0$　　$(a+2)(a-2)>0$　　ゆえに　$a<-\mathbf{2},\ \mathbf{2}<a$ ……②

②の条件のもとで，①の 2 つの実数解を α，β とすると，解と係数の関係より $\alpha+\beta=a$

このとき線分 PQ の中点 M の座標は

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{a\alpha+a\beta}{2}\right)=\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{a(\alpha+\beta)}{2}\right)=\left(\frac{a}{2},\ \frac{a^2}{2}\right)$$

と表される．よって $\mathrm{M}(x,\ y)$ とすると　$x=\dfrac{a}{2}$ ……③，$y=\dfrac{a^2}{2}$ ……④

③より　$a=2x$　これを④に代入して　$y=2x^2$

また，②に代入して　$2x<-2,\ 2<2x$　つまり　$x<-1,\ 1<x$

よって M は放物線 $y=\mathbf{2}x^2$ の $x<-\mathbf{1},\ \mathbf{1}<x$ の部分に存在する．

第 34 講　関数総合(5)

［1］　$c>0$ とする．曲線 $f(x)=x^3-x^2$ と直線 $g(x)=x-c$ が接するとき，$c=$ $\boxed{\text{ア}}$ であり，$-2\leqq x\leqq 2$ における $|f(x)-g(x)|$ の最大値は $\boxed{\text{イ}}$ である．

［2］　2 つの曲線 $y=2x^3+2p$ と $y=3px^2+12p^2x$ が異なる 3 つの共有点をもつような p の値の範囲は　$p<-\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}}<p$ である．

解答例

［1］　$f(x)=x^3-x^2$　より　$f'(x)=3x^2-2x$

これが直線 $y=g(x)$ の傾き 1 と等しくなるのは

$3x^2-2x=1$　　$(3x+1)(x-1)=0$　　$x=-\dfrac{1}{3}$，1

接点が $\left(-\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{4}{27}\right)$ のとき，$c=-\dfrac{5}{27}$　より　$c>0$ を満たさず不適．

接点が $(1,\ 0)$ のとき，$c=1>0$ より適する．したがって求める c の値は　$c=\mathbf{1}$

このとき　$g(x)=x-1$　より　$f(x)-g(x)=x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$

$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと　$h'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$-2\leqq x\leqq 2$ における $h(x)$ の増減表は右図

よって，$|f(x)-g(x)|=|h(x)|$ の最大値は

$|h(-2)|=\mathbf{9}$

x	-2	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	-9	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3

［2］　$2x^3+2p=3px^2+12p^2x$　より　$2x^3-3px^2-12p^2x+2p=0$

$f(x)=2x^3-3px^2-12p^2x+2p$ とおき，$f(x)$ が x 軸と異なる 3 つの共有点をもつときの p の値の範囲を求める．

$f'(x)=6x^2-6px-12p^2=6(x-2p)(x+p)$

$p=0$ のとき　$f'(x)=6x^2\geqq 0$ より　$f(x)$ は増加関数．よって $f(x)$ が x 軸と異なる 3 つの共有点をもつことはなく不適．

$p\neq 0$ のとき　$f(x)$ は $x=-p$，$2p$ で 2 つの極大値と極小値をもつ．この極大値と極小値の積が負であればよい．

$f(-p)=7p^3+2p=p(7p^2+2)$，$f(2p)=2p-20p^3=2p(1-10p^2)$

$f(-p)\cdot f(-2p)<0$　より　$2p^2(7p^2+2)(1-10p^2)<0$

$p^2>0$，$7p^2+2>0$ より　$1-10p^2<0$

したがって　$p<-\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{10}}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{10}}<p$

第35講　関数総合(6)

[1]　点 A$(a,\ 0)$ $(a>0)$ を通り放物線 $C：y=2x^2-8$ に接する直線が2本あるとき，a の値の範囲は $a>$ $\boxed{ア}$ である．このとき，2つの接点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とする．$\beta-\alpha=3$ のとき，$a=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$ であり，2本の接線と C で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ である．

[2]　$f(x)=x^2-x-2|x|$ とする．$y=f(x)$ と $y=mx$ が異なる3つの共有点をもつとき，原点以外の共有点の x 座標は $x=m-\boxed{カ}$，$x=m+\boxed{キ}$ であり，$y=f(x)$ と $y=mx$ で囲まれる部分の面積 S は，$m=-\boxed{ク}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ をとる．

解答例

[1]　$y=2x^2-8$　より　$y'=4x$

C 上の点 $(t,\ 2t^2-8)$ における接線の方程式は

$y=4t(x-t)+2t^2-8=4tx-2t^2-8$　……①

これが $(a,\ 0)$ を通るとき　$0=4ta-2t^2-8$　つまり　$t^2-2at+4=0$　……②

よって接線が2本存在するのは，②が異なる2実数解をもつとき．

判別式 D について $\dfrac{D}{4}=(-a)^2-4>0$　　$(a+2)(a-2)>0$　　$a>0$ より　$a>\mathbf{2}$

このとき，②の2実数解が α，β $(\alpha<\beta)$ より，解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2a$，$\alpha\beta=4$

$\beta-\alpha=3$　より　$(\beta-\alpha)^2=9$　　$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=9$　　$4a^2-16=9$

$a>0$ より　$a=\mathbf{\dfrac{5}{2}}$

このとき②より　$t^2-5t+4=0$　　$t=1,\ 4$　よって　$\alpha=1$，$\beta=4$

①より2本の接線の式は　$y=4x-10$，$y=16x-40$

求める面積は　$\displaystyle\int_1^{\frac{5}{2}}\{(2x^2-8)-(4x-10)\}dx+\int_{\frac{5}{2}}^4\{(2x^2-8)-(16x-40)\}dx$

$$=\int_1^{\frac{5}{2}}2(x-1)^2dx+\int_{\frac{5}{2}}^4 2(x-4)^2dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}(x-1)^3\right]_1^{\frac{5}{2}}+\left[\frac{2}{3}(x-4)^3\right]_{\frac{5}{2}}^4$$

$$=\frac{9}{4}+\frac{9}{4}=\mathbf{\frac{9}{2}}$$

[2]　$f(x)=x^2-x-2|x|$

$$=\begin{cases} x^2-x-2x=x^2-3x=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4} & (x\geqq 0) \\ x^2-x+2x=x^2+x=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4} & (x\leqq 0) \end{cases}$$

$x\geqq 0$ のとき　$f(x)=mx$　より　$x^2-(3+m)x=0$　　$x=0,\ m+3$

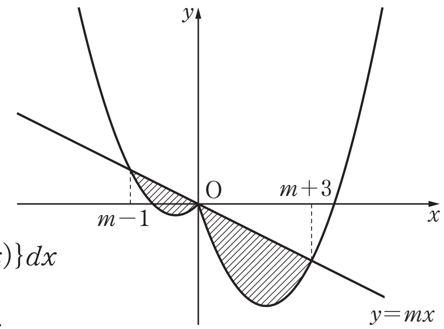
よって　$m+3>0$　つまり　$m>-3$ のとき　共有点は $x\geqq 0$ に2つ存在し,

$m\leqq -3$ のとき　共有点は原点のみ

$x\leqq 0$ のとき　$f(x)=mx$　より　$x^2+(-m+1)x=0$　　$x=0,\ m-1$

よって　$m-1<0$　つまり　$m<1$ のとき　共有点は $x\leqq 0$ に2つ存在し,

$m\geqq 1$ のとき　共有点は原点のみ



以上より，$y=f(x)$ と $y=mx$ の共有点が3つ存在するのは $-3<m<1$ のときで,

このとき原点以外の共有点の x 座標は

$\boldsymbol{x=m-1,\ m+3}$

$y=f(x)$ と $y=mx$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_{m-1}^{0}\{mx-(x^2+x)\}dx+\int_{0}^{m+3}\{mx-(x^2-3x)\}dx$$

$$=-\int_{m-1}^{0}x(x-m+1)dx-\int_{0}^{m+3}x(x-m-3)dx$$

$$=\frac{1}{6}(1-m)^3+\frac{1}{6}(m+3)^3$$

$$=2m^2+4m+\frac{14}{3}=2(m+1)^2+\frac{8}{3}\quad(-3<m<1)$$

したがって S は $\boldsymbol{m=-1}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{8}{3}}$ をとる.

第36講　数列

[1]　$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\log_5\frac{n+2}{n}=\boxed{\text{ア}}\log_5 2+\boxed{\text{イ}}\log_5 3+\boxed{\text{ウ}}\log_5 11$ である．

[2]　数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，関係式 $S_n=2a_n-n\cdot 2^{n+1}$ が成り立つ．

(1)　$a_1=\boxed{\text{エ}}$，$a_2=\boxed{\text{オカ}}$ である．

(2)　a_{n+1} を a_n と n の式で表すと　$a_{n+1}=\boxed{\text{キ}}a_n+(n+\boxed{\text{ク}})\cdot\boxed{\text{ケ}}^{n+1}$ となる．

(3)　$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，$b_n=\dfrac{n(n+\boxed{\text{コ}})}{2}$ と表される．このことより，一般項 a_n は $a_n=n(n+\boxed{\text{コ}})\cdot 2^{n-\boxed{\text{サ}}}$ である．

解答例

[1]　$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\log_5\frac{n+2}{n}=\sum_{n=1}^{10}\{\log_5(n+2)-\log_5 n\}$

$=(\log_5 3-\log_5 1)+(\log_5 4-\log_5 2)+(\log_5 5-\log_5 3)$

$+\cdots\cdots+(\log_5 12-\log_5 10)$

$=-\log_5 1-\log_5 2+\log_5 11+\log_5 12=\log_5 2+\log_5 3+\log_5 11$

よって　**ア＝1，イ＝1，ウ＝1**

[2]　(1)　$S_1=2a_1-1\cdot 2^2$　より　$a_1=2a_1-4$　　よって　$a_1=\mathbf{4}$

$S_2=2a_2-2\cdot 2^3$　より　$a_1+a_2=2a_2-16$

よって　$4+a_2=2a_2-16$　より　$a_2=\mathbf{20}$

(2)　$S_n=2a_n-n\cdot 2^{n+1}$　……①　より　$S_{n+1}=2a_{n+1}-(n+1)\cdot 2^{n+2}$　……②

②－①より　$S_{n+1}-S_n=2a_{n+1}-2a_n-(n+1)\cdot 2^{n+2}+n\cdot 2^{n+1}$

これと $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ より

$a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n+(-2n-2)\cdot 2^{n+1}+n\cdot 2^{n+1}$

よって　$a_{n+1}=\mathbf{2}a_n+(n+\mathbf{2})\cdot\mathbf{2}^{n+1}$　……③

(3)　③の両辺を 2^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+(n+2)$，$\dfrac{a_1}{2^1}=2$

よって　$\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+(n+2)$，$b_1=2$　より，

$n\geqq 2$ のとき　$\displaystyle b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+2)=2+\frac{(n-1)\{3+(n+1)\}}{2}=\frac{n(n+\mathbf{3})}{2}$

これは $n=1$ のときも成立する．　したがって　$a_n=2^n\cdot b_n=n(n+3)\cdot 2^{n-1}$

第 37 講　ベクトル(1)

△OAB において，OA＝2，OB＝3 とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，その内積を $\vec{a}\cdot\vec{b}=t$ とおく．∠AOB の二等分線と線分 AB の交点を C とし，直線 OA に関して点 B と対称な点を D，直線 BD と OA の交点を H とする．このとき $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{b}$，

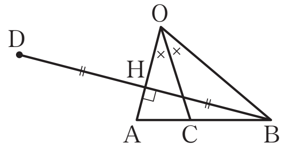
$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{t}{\boxed{\text{エ}}}\vec{a}-\vec{b}$ と表される．さらに $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となるとき，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$ であり，△OBH の面積は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である．

解答例

角の二等分線の性質より　AC：CB＝OA：OB＝2：3　　よって　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\vec{a}+\dfrac{\mathbf{2}}{5}\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{a}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$　つまり　$(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$　　$(k\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=0$

$k|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　　$4k-t=0$　　よって　$k=\dfrac{t}{4}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{t}{4}\vec{a}$



また，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{2}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\cdot\dfrac{t}{4}\vec{a}-\vec{b}=\dfrac{t}{\mathbf{2}}\vec{a}-\vec{b}$

さらに　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となるとき　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0$

つまり　$\left(\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}\right)\cdot\left(\dfrac{t}{2}\vec{a}-\vec{b}\right)=0$　　　$(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(t\vec{a}-2\vec{b})=0$

$3t|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+2t\vec{a}\cdot\vec{b}-4|\vec{b}|^2=0$　　$12t-6t+2t^2-36=0$

$t^2+3t-18=0$　　$(t+6)(t-3)=0$　　$t=3,\ -6$

$t=3$ のとき　$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{2\cdot3}=\dfrac{1}{2}$　　よって　$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{\mathbf{3}}$

$t=-6$ のとき　$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{-6}{2\cdot3}=-1$　　よって　$\angle\mathrm{AOB}=\pi$ より　不適

また $t=3$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{3}{4}\vec{a}$ より　$\triangle\mathrm{OBH}=\dfrac{3}{4}\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\mathbf{9}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{8}}$

第38講　ベクトル(2)

1辺の長さが1の正四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．線分OAを $s:(1-s)$ に内分する点をL，線分BCの中点をM，線分LMを $t:(1-t)$ に内分する点をPとし，$\angle\mathrm{POM}=\theta$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ とする．$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{1}{\boxed{\text{ア}}}$ である．

また，$\angle\mathrm{OPM}=\dfrac{\pi}{2}$ であるとき，直角三角形OPMに注目すると　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である．また，$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\vec{a}=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ より

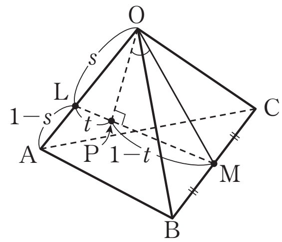
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\{t\overrightarrow{\mathrm{OM}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OL}}\}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}t+\dfrac{1}{\boxed{\text{コ}}}(1-t)s$ である．よって，s，t の関係式 $2(1-t)s=\boxed{\text{サ}}-\boxed{\text{シ}}\,t$　……①　が得られる．

同様に $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ であることから，$s\{t+2(1-t)s\}=\boxed{\text{ス}}$　……②　が得られる．

①，②より $(1-t)s=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ であり，これと①より $s=\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$，$t=\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である．

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{\boxed{\text{ト}}}\vec{a}+\dfrac{1}{\boxed{\text{ナ}}}\vec{b}+\dfrac{1}{\boxed{\text{ニ}}}\vec{c}$　が得られる．

解答例



$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OM}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\mathbf{\dfrac{3}{4}}$，

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\vec{a}=|\overrightarrow{\mathrm{OM}}||\vec{a}|\cos\angle\mathrm{AOM}=|\overrightarrow{\mathrm{OM}}||\vec{a}|\cdot\dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|}\cdot\dfrac{|\vec{a}|}{2}=\dfrac{1}{2}|\vec{a}|^2=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$　より

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\{t\overrightarrow{\mathrm{OM}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OL}}\}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=t|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2+(1-t)\times s\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{3}{4}t+\dfrac{1}{\mathbf{2}}(1-t)s$

よって　$\dfrac{3}{4}t+\dfrac{1}{2}(1-t)s=\dfrac{1}{2}$　より　$2(1-t)s=\mathbf{2}-\mathbf{3}t$　……①

一方，直角三角形POLに注目して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OL}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OL}}|\cos\angle\mathrm{POL}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\dfrac{1}{2}$ であり，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\{t\overrightarrow{\mathrm{OM}}+(1-t)s\vec{a}\}\cdot s\vec{a}=s\{t\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\vec{a}+(1-t)s|\vec{a}|^2\}=s\left\{\dfrac{t}{2}+(1-t)s\right\}$ であることから

$s\left\{\dfrac{t}{2}+(1-t)s\right\}=\dfrac{1}{2}$　　よって　$s\{t+2(1-t)s\}=\mathbf{1}$　……②

①を②に代入して　$(2-2t)s=1$　　$(1-t)s=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

これを①に代入して　$1=2-3t$　　よって　$s=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$，$t=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\vec{a}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{a}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\vec{b}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\vec{c}$　である．

第 39 講　論証，証明

［1］　x，y は実数とする．次の空欄に当てはまるものを，下の①〜④から選べ．

(1)「$x^2+y^2\leqq 1$」は「$-1\leqq x\leqq 1$ かつ $-1\leqq y\leqq 1$」であるための $\boxed{\text{ア}}$

(2)「$x+y\geqq 2$」は「$x\geqq 2$ または $y\geqq 2$」であるための $\boxed{\text{イ}}$

①　必要十分条件である　　②　十分条件だが必要条件ではない

③　必要条件だが十分条件ではない　　④　必要条件でも十分条件でもない

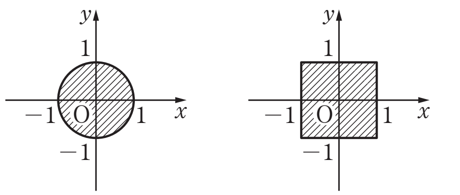
［2］　$13=12+1$ であることを利用して，13^{13} を 12^2 で割ったときの余りを求めると $\boxed{\text{ウエ}}$ である．

［3］　a，b，c，x，y，z を実数とするとき，
不等式 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$ が成り立つ．この不等式の等号が成立するときを考えることにより，$x+y+z=1$ のときの $x^2+y^2+z^2$ の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ であることがわかる．

解答例

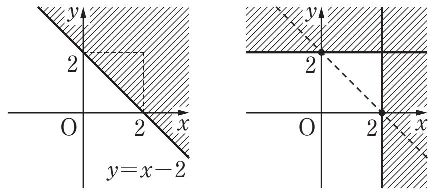
［1］　下図より　(1)　②　　(2)　④

(1)



$x^2+y^2\leqq 1$　　$-1\leqq x\leqq 1$ かつ $-1\leqq y\leqq 1$

(2)



$x+y\geqq 2$　　$x\geqq 2$ または $y\geqq 2$

［2］　$13^{13}=(12+1)^{13}=12^{13}+{}_{13}\mathrm{C}_1\cdot 12^{12}+{}_{13}\mathrm{C}_2\cdot 12^{11}+\cdots\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_{11}\cdot 12^2+{}_{13}\mathrm{C}_{12}\cdot 12+1$

$=12^2(12^{11}+{}_{13}\mathrm{C}_1\cdot 12^{10}+{}_{13}\mathrm{C}_2\cdot 12^9+\cdots\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_{11})+13\cdot 12+1$

$=144N+157=144(N+1)+13$　（N は正の整数）

よって 13^{13} を $12^2=144$ で割ったときの余りは　**13**

［3］　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2\geqq 0$

この等号が成立するのは　$ay-bx=0$，$bz-cy=0$，$cx-az=0$

つまり　$a:b:c=x:y:z$ のとき

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$ において，$a=b=c=1$ とすると

$(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(x+y+z)^2$　つまり　$3(x^2+y^2+z^2)\geqq(x+y+z)^2$

等号が成立するのは　$x:y:z=1:1:1$　つまり　$x=y=z$ のとき

よって $x+y+z=1$ のとき　$x^2+y^2+z^2\geqq\dfrac{1}{3}\cdot 1^2=\dfrac{1}{3}$

等号が成立するのは　$x=y=z=\dfrac{1}{3}$ のとき　　よって $x^2+y^2+z^2$ の最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

第 40 講　整数問題

［1］　等式 $xy+3x-y-8=0$ を満たす自然数 x，y は $x=$ $\boxed{\text{ア}}$，$y=$ $\boxed{\text{イ}}$ である．

［2］　a，x を自然数とする．$x^2+x-(a^2+5)=0$ を満たす a，x の組は

$(a,\ x)=($ $\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ $)$，$($ $\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ $)$（ただし $\boxed{\text{ウ}}<\boxed{\text{オ}}$）である．

［3］　$3x+5y=2009$ を満たす正の整数の組 $(x,\ y)$ は $\boxed{\text{キクケ}}$ 通りある．

解答例

［1］　$xy+3x-y-8=0$　より　$(x-1)(y+3)-5=0$　　$(x-1)(y+3)=5$

x，y は自然数より　$y+3 \geqq 4$

よって　$(x-1,\ y+3)=(1,\ 5)$ のみで，$x=\mathbf{2}$，$y=\mathbf{2}$

［2］　x の方程式 $x^2+x-(a^2+5)=0$　……①　の判別式を D とすると，①が自然数の解をもつためには $D=4a^2+21$ が平方数であることが必要である．

よって　$4a^2+21=b^2$（b は自然数）とおくと，$b^2-4a^2=21$

$(b+2a)(b-2a)=21$

$b+2a>0$　より　$b-2a>0$　　また　$b+2a>b-2a$

よって　$(b+2a,\ b-2a)=(7,\ 3)$，$(21,\ 1)$　より　$(a,\ b)=(1,\ 5)$，$(5,\ 11)$

$a=1$ のとき　①は $x^2+x-6=0$　　$(x-2)(x+3)=0$　　$x=2,\ -3$

$a=5$ のとき　①は $x^2+x-30=0$　　$(x-5)(x+6)=0$　　$x=5,\ -6$

いずれも自然数の解をもち，適する．　　以上より　$(a,\ x)=(\mathbf{1},\ \mathbf{2})$，$(\mathbf{5},\ \mathbf{5})$

［3］　$3x+5y=2009$　……①　の解の 1 つとして $x=3$，$y=400$ が存在し，

$3\cdot3+5\cdot400=2009$　……②　である．

①－②より　$3(x-3)+5(y-400)=0$　つまり　$3(x-3)=5(400-y)$

3 と 5 は互いに素であることより，$400-y=3k$（k は整数）とおける．

このとき　$x-3=5k$　　よって　$x=5k+3$，$y=400-3k$ と表せる．

$x>0$，$y>0$　より　$5k+3>0$，$400-3k>0$　　よって　$-\dfrac{3}{5}<k<\dfrac{400}{3}$

これを満たす整数 k は　$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 133$

よって　題意を満たす正の整数の組 $(x,\ y)$ は　**134** 通り

第41講　総合問題(1)

[1]　$x^2-4xy+5y^2+6x-14y+15$ (x，y は実数) は，$x=-\boxed{\text{ア}}$，$y=\boxed{\text{イ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{ウ}}$ をとる．

[2]　p を実数とし，方程式 $x^3-px^2-\dfrac{13}{4}x+\dfrac{15}{8}=0$ は3つの実数解 a，b，c ($a>b>c$) をもつとする．$a+c=2b$ を満たすとき，$a=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$，$b=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$，$c=-\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$，$p=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である．

解答例

[1]　$x^2-4xy+5y^2+6x-14y+15=x^2-2(2y-3)x+5y^2-14y+15$

$$=(x-2y+3)^2+y^2-2y+6$$
$$=(x-2y+3)^2+(y-1)^2+5$$

よって　$x=2y-3$ かつ $y=1$　　つまり　$x=-\mathbf{1}$，$y=\mathbf{1}$ のとき，最小値 $\mathbf{5}$ をとる．

[2]　解と係数の関係より

$a+b+c=p$　……①，　$ab+bc+ca=-\dfrac{13}{4}$　……②，　$abc=-\dfrac{15}{8}$　……③

条件より　$a+c=2b$　……④

②より　$b(a+c)+ca=-\dfrac{13}{4}$　これに④を代入して　$2b^2+ca=-\dfrac{13}{4}$

$ca=-2b^2-\dfrac{13}{4}$　……⑤　　これを③に代入して

$\left(-2b^2-\dfrac{13}{4}\right)b=-\dfrac{15}{8}$　　$16b^3+26b-15=0$

$(2b-1)(8b^2+4b+15)=0$　　$8b^2+4b+15=8\left(b+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{29}{2}>0$ より　$b=\dfrac{1}{2}$

このとき④より　$a+c=1$　　③より　$ac=-\dfrac{15}{4}$

これらより a，c は2次方程式 $t^2-t-\dfrac{15}{4}=0$ の2解．

$4t^2-4t-15=0$　　$(2t+3)(2t-5)=0$　　$t=-\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{5}{2}$

$a>b>c$ より　$a=\mathbf{\dfrac{5}{2}}$，$b=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$，$c=-\mathbf{\dfrac{3}{2}}$　　また①と④より　$p=3b=\mathbf{\dfrac{3}{2}}$

第42講　総合問題(2)

［1］　4個の数字1，2，3，4を用いて4桁の整数を作る．ただし，同じ数字をくり返し用いてもよいとする．このように作った4桁の整数は全部で $\boxed{\text{アイウ}}$ 個あり，4桁の整数が3の倍数になる整数は全部で $\boxed{\text{エオ}}$ 個ある．

［2］　$f(x)=-x^3+x^2+6x+9\ (-1\leqq x\leqq 2)$ の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{カキク}}+\boxed{\text{ケコ}}\sqrt{19}}{27}$ である．

解答例

［1］　4桁の整数は全部で $4^4=$**256** 個ある．

また，1，2，3，4を，3で割った余りによって次のように分類する．

余り0　…　$G_0=\{3\}$　　余り1　…　$G_1=\{1,\ 4\}$　　余り2　…　$G_2=\{2\}$

4桁の整数が3の倍数，つまり各位の数字の和が3の倍数になる4つの数字の選び方は以下．

(i)　G_0 から4つ
(ii)　G_0 から2つ，G_1，G_2 から1つずつ
(iii)　G_0 から1つ，G_1 から3つ
(iv)　G_0 から1つ，G_2 から3つ
(v)　G_1，G_2 から2つずつ

(i)のとき　1通り

(ii)のとき　4つの数字の選び方は　$1^2\times{}_2\mathrm{C}_1\times 1=2$ 通り

それぞれの順列は　$\dfrac{4!}{2!}=12$ 通り　　よって　$2\times 12=24$ 通り

(iii)のとき　4つの数字の選び方は　$1\times 2^3=8$ 通り

それぞれの順列は　$\dfrac{4!}{3!}=4$ 通り　　よって　$8\times 4=32$ 通り

(iv)のとき　4つの数字の選び方は　$1\times 1^3=1$ 通り

その順列は　$\dfrac{4!}{3!}=4$ 通り　　よって　$1\times 4=4$ 通り

(v)のとき　4つの数字の選び方は　$2^2\times 1^2=4$ 通り

それぞれの順列は　$\dfrac{4!}{2!2!}=6$ 通り　　よって　$4\times 6=24$ 通り

以上より，求める個数は　$1+24+32+4+24=$**85** 個

[2]　$f(x)=-x^3+x^2+6x+9$　より　$f'(x)=-3x^2+2x+6$

$f'(x)=0$ つまり $3x^2-2x-6=0$ となるのは　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{19}}{3}$ のとき

$\sqrt{19}=4.\cdots\cdots$　より　$\dfrac{1-\sqrt{19}}{3}<-1$，$-1<\dfrac{1+\sqrt{19}}{3}<2$

$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{19}}{3}$，$\beta=\dfrac{1+\sqrt{19}}{3}$ とおくと，

$f(x)$ の増減表は右図となるから，最大値は $f(\beta)$ である．

x	-1	$\cdots$	β	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

また，$3\beta^2-2\beta-6=0$ より，$f(x)=(3x^2-2x-6)\left(-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{9}\right)+\dfrac{38}{9}x+\dfrac{29}{3}$

よって求める最大値は　$f(\beta)=\dfrac{38}{9}\beta+\dfrac{29}{3}=\dfrac{38}{9}\cdot\dfrac{1+\sqrt{19}}{3}+\dfrac{29}{3}=\dfrac{\mathbf{299+38\sqrt{19}}}{\mathbf{27}}$

第 43 講　総合問題(3)

［1］　連立方程式 $\begin{cases} x-(a+6)y=1 \\ ax-8(a+1)y=-2 \end{cases}$ は $a=$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき解が存在せず，

$a=-$ $\boxed{\text{イ}}$ のとき解が無数に存在する．$a\neq$ $\boxed{\text{ア}}$ かつ $a\neq-$ $\boxed{\text{イ}}$ のときは解がただ 1 つ存在し，その解 $(x,\ y)$ がともに整数になるときの a の値は

$a=$ $\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$　（ただし $\boxed{\text{ウ}}<\boxed{\text{エ}}$ ）である．

［2］　方程式 $12(\log_8 x)^2-28\log_8 x+3=0$ の 2 つの解を s，t とするとき，$st=$ $\boxed{\text{オカキ}}$ である．

解答例

［1］　$\begin{cases} x-(a+6)y=1 & \cdots\cdots① \\ ax-8(a+1)y=-2 & \cdots\cdots② \end{cases}$

①×a－②より　$(-a^2+2a+8)y=a+2$

つまり　$-(a+2)(a-4)y=a+2$　……③

$a=\mathbf{4}$ のとき　③は $0\cdot y=6$ より　これを満たす y は存在せず，連立方程式の解も存在しない．

$a=-\mathbf{2}$ のとき　③は $0\cdot y=0$ より　これを満たす y は無数に存在し，それに対応する x も無数に存在する．つまり，連立方程式の解も無数に存在する．

$a\neq4$ かつ $a\neq-2$ のとき　③より　$y=-\dfrac{1}{a-4}$　このとき $x=-\dfrac{10}{a-4}$

つまり，解がただ 1 つ存在する．この解が整数になるのは，a が整数であることより

$a-4=\pm1$　　つまり　$a=\mathbf{3}$，$\mathbf{5}$ のときである．

［2］　$\log_8 x=X$ とおくと，$12X^2-28X+3=0$ の解が $X=\log_8 s$，$\log_8 t$ である．

よって解と係数の関係より

$\log_8 s+\log_8 t=\dfrac{28}{12}=\dfrac{7}{3}$　　$\log_8 st=\dfrac{7}{3}$

したがって　$st=8^{\frac{7}{3}}=(2^3)^{\frac{7}{3}}=2^7=\mathbf{128}$ である．

第44講　総合問題(4)

［1］ 実数 a に対し，関数 $f(x)=x^3-3x$ の $a \leqq x \leqq a+1$ における最小値は

$a \leqq \dfrac{-\boxed{ア}-\sqrt{\boxed{イウ}}}{\boxed{エ}}$ のとき　$a^3-\boxed{オ}a$

$\dfrac{-\boxed{ア}-\sqrt{\boxed{イウ}}}{\boxed{エ}} \leqq a \leqq \boxed{カ}$ のとき　$a^3+\boxed{キ}a^2-\boxed{ク}$

$\boxed{カ} \leqq a \leqq \boxed{ケ}$ のとき　$\boxed{コサ}$　　　$\boxed{ケ} \leqq a$ のとき　$a^3-\boxed{オ}a$

である．

［2］ n を自然数とするとき，$x+y \leqq n$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ は

$\dfrac{1}{\boxed{シ}}(n+1)(n+\boxed{ス})$ 個ある．

解答例

［1］ $f(x)=x^3-3x$　より　$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f(x)$ の増減表は右図．

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

ここで，$a \leqq -1 \leqq a+1$　かつ　$f(a)=f(a+1)$

となるときを考える．

$a^3-3a=(a+1)^3-3(a+1)$　　$a^3-3a=a^3+3a^2-2$

$3a^2+3a-2=0$　　$-2 \leqq a \leqq -1$ より　$a=\dfrac{-3-\sqrt{33}}{6}$

よって，$a \leqq \dfrac{\mathbf{-3-\sqrt{33}}}{\mathbf{6}}$ のとき　最小値 $f(a)=a^3-\mathbf{3}a$

$\dfrac{-3-\sqrt{33}}{6} \leqq a$　かつ　$a+1 \leqq 1$

つまり　$\dfrac{-3-\sqrt{33}}{6} \leqq a \leqq \mathbf{0}$ のとき　最小値 $f(a+1)=a^3+\mathbf{3}a^2-\mathbf{2}$

$0 \leqq a \leqq \mathbf{1}$ のとき　最小値 $f(1)=\mathbf{-2}$　　　$1 \leqq a$ のとき　最小値 $f(a)=a^3-3a$

［2］ $x=k$（$k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n$）上の格子点の個数は

$(-k+n)-0+1=-k+(n+1)$

よって求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{n}\{-k+(n+1)\}=(n+1)+\sum_{k=1}^{n}\{-k+(n+1)\}$$

$$=(n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)\cdot n$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)\{2-n+2n\}=\frac{1}{\mathbf{2}}(n+1)(n+\mathbf{2})\text{（個）}$$

第45講　総合問題(5)

[1]　曲線 C：$y=x^2-1$ 上を動く点Pと直線 l：$y=x-3$ との距離が最小となるとき，その距離を求めたい．$\mathrm{P}(t,\ t^2-1)$ とおくと，C と l の距離は

$\dfrac{1}{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}\left|-t^2+t-\boxed{\text{イ}}\right|$ ……①　と表される．ここで，点Pは直線 l の上側にあることより，①の絶対値の中は $\boxed{\text{ウ}}$ である．よって①は $t=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ をとり，これが求める距離の最小値である．

ただし $\boxed{\text{ウ}}$ は　①　正　　②　負　　③　0　から選べ．

[2]　和が756，最大公約数が84である2つの自然数のうち，ともに3桁であるものの組は $\boxed{\text{ケ}}$ 個ある．

解答例

[1]　$\mathrm{P}(t,\ t^2-1)$ と l：$x-y-3=0$ の距離は　$\dfrac{|t-t^2+1-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\mathbf{2}}}|-t^2+t-\mathbf{2}|$ ……①

と表される．

ここで点 $\mathrm{P}(t,\ t^2-1)$ は $y>x-3$　つまり　$x-y-3<0$ を満たす領域内にあるので，$t-(t^2-1)-3<0$　つまり　$-t^2+t-2<0$ であり，①の絶対値の中は**負**である．

よって　①は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(t^2-t+2)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}\right\}$ と変形できる．

このことより，①は $t=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{7}{4}=\dfrac{\mathbf{7\sqrt{2}}}{\mathbf{8}}$ をとり，

これが求める距離の最小値である．

[2]　最大公約数が84である2つの自然数を a，b（$a\leqq b$）とすると，

$a=84a'$，$b=84b'$（a'，b' は互いに素の自然数．$a'\leqq b'$）と表せる．

$a+b=756$ より　$84(a'+b')=756$　　　$a'+b'=9$

よって　$(a',\ b')=(1,\ 8),\ (2,\ 7),\ (4,\ 5)$ に限られる．

このとき　$(a,\ b)=(84,\ 672),\ (168,\ 588),\ (336,\ 420)$

このうちともに3桁であるものの組は**2**個

第 46 講　総合問題(6)

[1]　関数 $f(x)=\int_0^x (t+2-|t^2-4|)dt$ は，

$0\leqq x<$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき $f(x)=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}x^3+\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}x^2-\boxed{\text{カ}}\,x$ となる．

また，$x>0$ の範囲で，$f(x)$ は $x=\boxed{\text{キ}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ をとる．

[2]　整数の組 $(p,\ q)$ のうち，実数係数の 2 次方程式 $x^2-2px+13=0$ の解の 1 つが $p+qi$ であるような組 $(p,\ q)$ は全部で $\boxed{\text{サ}}$ 個ある．ただし，i は虚数単位とする．

解答例

[1]　$t+2-|t^2-4|=\begin{cases} t+2-(t^2-4)=-t^2+t+6 & (t\leqq -2,\ 2\leqq t) \\ t+2-(-t^2+4)=t^2+t-2 & (-2\leqq t\leqq 2) \end{cases}$

よって　$0\leqq x<\mathbf{2}$ のとき

$$f(x)=\int_0^x (t^2+t-2)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-2t\right]_0^x=\boldsymbol{\frac{1}{3}}x^3+\boldsymbol{\frac{1}{2}}x^2-\mathbf{2}x$$

$x\geqq 2$ のとき　$f(x)=\int_0^2 (t^2+t-2)dt+\int_2^x (-t^2+t+6)dt$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-2t\right]_0^2+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+6t\right]_2^x$$

$$=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x-\frac{32}{3}$$

$$f'(x)=\begin{cases} x^2+x-2=(x+2)(x-1) & (0\leqq x<2) \\ -x^2+x+6=-(x+2)(x-3) & (x\geqq 2) \end{cases}$$

よって　$f(x)$ の増減表は右図．

したがって　$x=\mathbf{3}$ で最大値 $\boldsymbol{\dfrac{17}{6}}$ をとる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↘	$-\frac{7}{6}$	↗	$\frac{2}{3}$	↗	$\frac{17}{6}$	↘

[2]　実数係数の方程式 $x^2-2px+13=0$ の解の 1 つが $p+qi$ であるとき，もう 1 つの解は $p-qi$ である．

よって解と係数の関係より　$(p+qi)(p-qi)=13$　　$p^2+q^2=13$

これを満たす整数の組 $(p,\ q)$ は，$p<q$ のとき

$(p,\ q)=(2,\ 3)$，$(2,\ -3)$，$(-2,\ 3)$，$(-2,\ -3)$ の 4 組

$p>q$ のときも同様に 4 組．したがって求める個数は **8** 個

第 47 講　総合問題(7)

[1]　xy 平面上の 2 点 $(t,\ t)$，$(t-1,\ 1-t)$ を通る直線 l_t の方程式は

$y=(\boxed{\text{ア}}\,t-1)x-\boxed{\text{イ}}\,t^2+\boxed{\text{ウ}}\,t$ と表される．t が実数のとき，直線 l_t の通りうる範囲は，不等式 $y\leqq\dfrac{1}{\boxed{\text{エ}}}x^2+\dfrac{1}{\boxed{\text{オ}}}$ を満たす点 $(x,\ y)$ の集合として表される．

[2]　座標空間に 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ \sqrt{2},\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ がある．原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ から三角形 ABC に下ろした垂線の足 H の座標を求めたい．$\mathrm{H}(x,\ y,\ z)$ とおくと，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{z}{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}(\sqrt{\boxed{\text{カ}}},\ 1,\ \sqrt{\boxed{\text{カ}}})$ と表せる．

よって $\vec{v}=(\sqrt{\boxed{\text{カ}}},\ 1,\ \sqrt{\boxed{\text{カ}}})$ とおくと，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{v}$　……①

と表され，$\vec{v}\perp\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ かつ $\vec{v}\perp\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ である．また H は平面 ABC 上の点であることより

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$　……②　と表される．①と②より　$k\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

この式の両辺について $\vec{v}$ との内積をとることにより $k=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である．

したがって H の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{コ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{コ}}}\right)$ である．

解答例

[1]　$y=\dfrac{(1-t)-t}{(t-1)-t}(x-t)+t$　つまり　$l_t：y=(\mathbf{2}t-1)x-\mathbf{2}t^2+\mathbf{2}t$　……①

①を変形して　$2t^2-2(x+1)t+x+y=0$　この t の 2 次方程式が実数解をもつような x，y の条件を求めればよい．判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=\{-(x+1)\}^2-2(x+y)\geqq0$　　　$y\leqq\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$

よって求める領域を表す不等式は　$y\leqq\dfrac{1}{\mathbf{2}}x^2+\dfrac{1}{\mathbf{2}}$ である．

[2]　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(1,\ 0,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(0,\ \sqrt{2},\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(x,\ y,\ z)$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ より　$x-z=0$ かつ $\sqrt{2}y-z=0$　　よって　$x=z$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}z$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(z,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}z,\ z\right)=\dfrac{z}{\sqrt{\mathbf{2}}}(\sqrt{2},\ 1,\ \sqrt{2})$

$\vec{v}=(\sqrt{2},\ 1,\ \sqrt{2})$ とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{v}$ であり　$\vec{v}\perp\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ かつ $\vec{v}\perp\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$　より　$k\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

$\vec{v}$ との内積をとると　$k\vec{v}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\vec{v}+s\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\vec{v}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\vec{v}$

つまり　$k|\vec{v}|^2=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\vec{v}$　　$5k=\sqrt{2}$　　よって　$k=\dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{5}}$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\sqrt{2}}{5}(\sqrt{2},\ 1,\ \sqrt{2})$ より H の座標は $\left(\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}},\ \dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}}{5},\ \dfrac{\mathbf{2}}{5}\right)$ である．

第 48 講　総合問題(8)

［1］ a を定数とする．$f(x)=\left(27^x+\dfrac{1}{27^x}\right)-\dfrac{3}{2}a\left(9^x+\dfrac{1}{9^x}\right)+3\left(3^x+\dfrac{1}{3^x}\right)+1$ は

$a \leqq \boxed{\text{ア}}$ のとき最小値 $-\boxed{\text{イ}}a+\boxed{\text{ウ}}$ をとり，$a>\boxed{\text{ア}}$ のとき最小値

$-\dfrac{a^3}{\boxed{\text{エ}}}+\boxed{\text{オ}}a+\boxed{\text{カ}}$ をとる．

［2］ $p^2-q^2=24$ を満たす正の奇数の組 $(p,\ q)$ は全部で $\boxed{\text{キ}}$ 個ある．

解答例

［1］ $t=3^x+\dfrac{1}{3^x}$ とおくと，$3^x>0$ より，相加平均と相乗平均の関係から

$t \geqq 2\sqrt{3^x \cdot \dfrac{1}{3^x}}=2$　等号成立は　$3^x=\dfrac{1}{3^x}$　つまり　$x=0$ のとき　　よって　$t \geqq 2$

$27^x+\dfrac{1}{27^x}=\left(3^x+\dfrac{1}{3^x}\right)^3-3\left(3^x+\dfrac{1}{3^x}\right)=t^3-3t$　　$9^x+\dfrac{1}{9^x}=\left(3^x+\dfrac{1}{3^x}\right)^2-2=t^2-2$

よって　$f(x)=(t^3-3t)-\dfrac{3}{2}a(t^2-2)+3t+1=t^3-\dfrac{3}{2}at^2+3a+1$

$g(t)=t^3-\dfrac{3}{2}at^2+3a+1$ とおくと　$g'(t)=3t^2-3at=3t(t-a)$

$a \leqq \mathbf{2}$ のとき　$t \geqq 2$ において　$g'(t) \geqq 0$ より　$g(t)$ は $t \geqq 2$ において単調増加．

よって最小値は　$g(2)=\mathbf{-3}a+\mathbf{9}$

$a>2$ のとき　$t \geqq 2$ における増減表は右図．

t	2	$\cdots$	a	$\cdots$
$g'(t)$		$-$		$+$
$g(t)$		↘		↗

よって最小値は　$g(a)=-\dfrac{a^3}{\mathbf{2}}+\mathbf{3}a+\mathbf{1}$

［2］ $p=2m-1$，$q=2n-1$ とおくと，$p>0$，$q>0$ だから $m \geqq 1$，$n \geqq 1$

$p^2-q^2=24>0$ より $p>q$　　よって　$m>n \geqq 1$

$p^2-q^2=(p+q)(p-q)=(2m-1+2n-1)(2m-1-2n+1)$

$\quad=4(m+n-1)(m-n)=24$

よって　$(m+n-1)(m-n)=6$

$m+n$ と $m-n$ の偶奇は一致するので，$m+n-1$ と $m-n$ は一方が奇数，一方が偶数である．

また，$m+n>m-n$ より $m+n-1 \geqq m-n$

したがって $(m+n-1,\ m-n)=(3,\ 2),\ (6,\ 1)$ に限られる．

$(m,\ n)=(3,\ 1),\ (4,\ 3)$

ゆえに　$(p,\ q)$ の組は　$(p,\ q)=(5,\ 1),\ (7,\ 5)$ の **2** 個